

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática

# Existência de soluções para uma classe de problemas elípticos não quadráticos no infinito

Renato Augusto Nascimento Santos

JOÃO PESSOA – PB  
AGOSTO DE 2014

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática

# Existência de soluções para uma classe de problemas elípticos não quadráticos no infinito

por

Renato Augusto Nascimento Santos

sob a orientação do

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

João Pessoa – PB  
Agosto de 2014

S237e Santos, Renato Augusto Nascimento.  
Existência de soluções para uma classe de problemas  
elípticos não quadráticos no infinito / Renato Augusto  
Nascimento Santos. - João Pessoa, 2014.  
66f.  
Orientador: Bruno Henrique Carvalho Ribeiro  
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN  
1. Matemática. 2. Equações diferenciais parciais.  
3. Condição de Cerami. 4. Teorema de Deformação.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

# Existência de soluções para uma classe de problemas elípticos não quadráticos no infinito

por

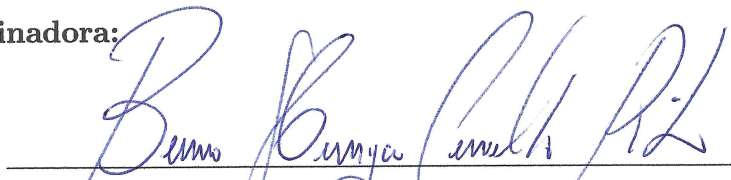
Renato Augusto Nascimento Santos <sup>1</sup>

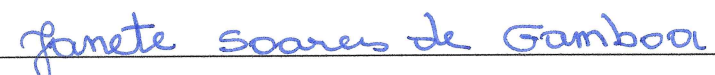
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 08 de Agosto de 2014.

Banca Examinadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro – UFPB  
(Orientador)

  
\_\_\_\_\_  
Profa. Dra. Janete Soares de Gamboa – UnB  
(Examinadora Externa)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo – UFPB  
(Examinador Interno)

---

<sup>1</sup>O autor foi bolsista da Capes durante a elaboração desta dissertação.

*Aos meus pais Rosa e  
Jaime.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus por mais uma etapa vencida.

Aos meus pais, Rosa Nascimento e Jaime Santos por estarem ao meu lado, me apoiando, me incentivando.

Ao Professor Bruno pela excelente orientação e pela paciência.

Aos professores do DM-UFPB, em particular aos que tive a honra de ser aluno, Bruno Ribeiro, Antônio de Andrade, Alexandre Simas, Pedro Hinojosa, Aurélio Mene-  
gon e Napoleon Tosta.

Aos professores da UEPB do campus de Patos-PB Wilker Lima e Francisco Sibério.

Aos professores Napoleon Tosta e Vilmar Vaz por me recomendarem ao Mestrado em Matemática da UFPB onde fui aceito.

A Lourdes Freire e seu esposo Arnaldo pelo acolhimento na cidade de João Pessoa-PB, duas pessoas abençoadas.

A Maria de Fátima nos momentos em que sempre precisei estava me ajudando.

Aos professores do curso de Matemática da UESC-BA Eduardo Palmeira, Cícero Alfredo, José Reis e Rosane Furtado, e aos colegas Marcos Ferreira e Danilo Souza.

Aos colegas do Mestrado em Matemática da UFPB pelos momentos de estudo e descontração Cleiton Ricardo, Clemerson Menezes, Hudson Cavalcante, Luan Sousa e Jarbas Dantas.

Enfim, a Capes pelo apoio financeiro.

# Resumo

Neste trabalho, estudamos o Teorema de Deformação usando a condição introduzida por Cerami [8]. Além disso, estudamos o seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x, u), & x \in \Omega \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde  $\Omega$  é um domínio suave e limitado em  $\mathbb{R}^N$  e  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de Caratheodory com crescimento subcrítico.

No problema acima, utilizamos novamente a condição de Cerami [8], para garantir a existência de solução não-trivial, para este propósito, usaremos Teorema Geral de Minimax provado pelo Bartolo em [12].

**Palavras-chave:** Equações diferenciais parciais, Condição de Cerami, Teorema de Deformação.

# Abstract

We study the deformation theorem using the condition introduced by Cerami [8]. Furthermore, we study the following Dirichlet problem:

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x, u), & x \in \Omega \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

where  $\Omega$  is a smooth and bounded domain in  $\mathbb{R}^N$  and  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is a Caratheodory function with subcritical growth.

In the above problem, we use the condition of Cerami [8] again, to ensure the existence of non-trivial solution. For this purpose, we use General Minimax Theorem proved by Bartolo in [12].

**Keywords:** Partial differential equations, Cerami condition, Deformation Theorem.



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>1 Teorema de Deformação e princípio geral minimax</b>	<b>6</b>
1.1 Teorema de Deformação . . . . .	9
1.2 Teorema Geral Minimax . . . . .	18
<b>2 Problemas elípticos não quadráticos no infinito</b>	<b>20</b>
<b>A Resultados Básicos</b>	<b>46</b>
<b>B Grau Topológico</b>	<b>55</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>57</b>

# Introdução

Neste trabalho, temos como objetivo estudar problemas elípticos em domínios limitados de  $\mathbb{R}^N$ . Mais precisamente, considere o problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x, u), & x \in \Omega \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

onde  $\Omega$  é um domínio suave e limitado de  $\mathbb{R}^N$  e  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de Carathéodory com crescimento subcrítico, isto é,

$$|f(x, s)| \leq a_0 |s|^{p-1} + b_0, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega \quad \text{q.t.p.}$$

com  $a_0, b_0 > 0$  constantes,  $1 \leq p < \frac{2N}{N-2}$  se  $N \geq 3$  e  $1 \leq p < \infty$  se  $N = 1, 2$ .

Mostra-se que as soluções fracas  $u \in H_0^1(\Omega)$  de (1) são exatamente os pontos críticos em  $H_0^1(\Omega)$  do funcional

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx,$$

onde  $F(x, s) = \int_0^s f(x, t) dt$ .

Neste caso, temos duas situações para o problema (1):

1. A situação *subquadrático*, onde o “potencial”  $F$  satisfaz

$$\limsup_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{F(x, s)}{s^2} \leq c < +\infty;$$

2. A situação *superquadrático*, onde  $F$  satisfaz

$$\limsup_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{F(x, s)}{s^2} = +\infty.$$

Vamos apresentar uma abordagem unificada para ambas as situações por meio de

uma condição de *não-quadraticidade* no infinito em  $F$ , ou seja, nossas hipóteses serão as seguintes:

$$\limsup_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{F(x, s)}{|s|^q} \leq b < +\infty, \quad \text{uniformemente para } x \in \Omega \text{ q.t.p.} \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \liminf_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{f(x, s)s - 2F(x, s)}{|s|^\mu} \geq a > 0, \quad \text{uniformemente para } x \in \Omega \text{ q.t.p.} \\ \text{ou} \\ \limsup_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{f(x, s)s - 2F(x, s)}{|s|^\mu} \leq -a < 0, \quad \text{uniformemente para } x \in \Omega \text{ q.t.p.} \end{array} \right. \quad (3)$$

Observemos que (2) é satisfeita com  $q = p$ . De fato,

$$\frac{F(x, s)}{|s|^q} = \frac{\int_0^s f(x, t) dt}{|s|^q} \leq \frac{\int_0^s (a_0 |t|^{p-1} + b_0) dt}{|s|^q} = \frac{(a_0/p)|s|^p + b_0|s|}{|s|^p} = \frac{a_0}{p} + b_0|s|^{1-p},$$

como  $1 \leq p$ , obtemos

$$\limsup_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{F(x, s)}{|s|^q} \leq b < +\infty, \quad \text{onde } b = \frac{a_0}{p}.$$

A condição de não-quadraticidade no infinito foi introduzida em [3, 4] com  $\mu = 1$  para o tratamento de sistemas elípticos subquadráticos, em particular, para uma grande classe de problemas de ressonância.

A fim de ilustrar o seu significado, considere uma função  $f(x, s) = \lambda s + g(s)$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Assumimos que  $g$  satisfaça a condição Landesman-Lazer [7],

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} g(s) = g_\pm, \quad \text{com } g_\pm > 0.$$

Assim,

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{G(s)}{|s|} = |g_\pm|.$$

Logo,  $F$  satisfaz (3) para todo  $\mu \leq 1$ , confira o apêndice A. Por outro lado, consideremos a condição

$$0 < \theta F(x, s) \leq f(x, s)s, \quad \forall |s| \geq R, \quad \text{uniformemente para } x \in \Omega$$

para algum  $\theta > 2$  e  $R > 0$ , introduzida por Ambrosetti e Rabinowitz [1] para obter a solução não-trivial no caso superquadrático. Mostra-se que,

---


$$F(x, s) \geq a_1 |s|^\theta, \quad \forall |s| \geq M, \text{ para algum } a_1 > 0.$$

Logo,

$$\frac{f(x, s)s - 2F(x, s)}{|s|^\mu} \geq (\theta - 2) \frac{F(x, s)}{|s|^\mu} \geq (\theta - 2)a_1 |s|^{\theta-\mu}.$$

Assim,  $F$  satisfaz (3) para todo  $\mu \leq \theta$ , confira o apêndice A.

A condição de Landesman-Lazer ou a condição de Ambrosetti-Rabinowitz produz a condição de compacidade de Palais-Smale necessária para aplicar os métodos variacionais clássicos.

No *Capítulo 1*, vamos provar um Teorema de Deformação, que se encontra no artigo do Bartolo et al [12]. Para isso, utilizaremos a condição do tipo Palais-Smale introduzida por Cerami em [8]. Também demonstraremos o Teorema Geral Minimax devido a Bartolo et al [12], que garante que o funcional  $J$  possui um valor crítico, dessa forma, iremos garantir que o problema (1) tem solução não-trivial.

No *Capítulo 2*, demonstraremos que (2) e (3) (com uma restrição aos valores de  $\mu$ ) implicam numa condição de compacidade introduzida por Cerami [8] e usada por Bartolo et al [12] para provar o Teorema Geral de Minimax (também demonstrado no primeiro capítulo deste trabalho), a partir do qual o problema (1) tem solução não-trivial. Neste capítulo, vamos usar o artigo do Costa & Magalhães [5]. Mais precisamente, vamos supor o cruzamento do primeiro autovalor  $\lambda_1$  de  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ :

$$\limsup_{s \rightarrow 0} \frac{2F(x, s)}{s^2} \leq \alpha < \lambda_1 < \beta \leq \liminf_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{2F(x, s)}{s^2}, \quad (4)$$

uniformemente para  $x \in \Omega$  q.t.p.

Dessa forma, no Teorema 2.1 iremos provar que se  $F$  satisfaz (2), (3) e (4) com  $\mu > (N/2)(q - 2)$ , então o problema (1) tem solução não-trivial  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

Denotemos por  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots$  os autovalores de  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ .

Chamamos o problema (1) de ressonante ou duplamente ressonante, respectivamente, quando

$$\left[ \lim_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{f(x, s)}{s} = \lambda_j \right] \text{ ou } \left[ \lambda_j \leq \liminf_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{f(x, s)}{s} \leq \limsup_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{f(x, s)}{s} \leq \lambda_{j+1} \right]$$

para  $j \geq 1$ , uniformemente para  $x \in \Omega$  q.t.p.

Mais geralmente, o problema (1) é chamado ressonante ou duplamente ressonante respectivamente quando

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{2F(x, s)}{s^2} = \lambda_j, \quad \text{uniformemente para } x \in \Omega \text{ q.t.p.} \quad (5)$$

---

ou

$$\lambda_j \leq L(x) = \liminf_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{2F(x, s)}{s^2} \leq \limsup_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{2F(x, s)}{s^2} = K(x) \leq \lambda_{j+1}, \quad (6)$$

uniformemente para  $x \in \Omega$  q.t.p.

Vamos assumir que

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} [f(x, s)s - 2F(x, s)] = +\infty, \quad \text{uniformemente para } x \in \Omega \text{ q.t.p.} \quad (7)$$

ou

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} [f(x, s)s - 2F(x, s)] = -\infty, \quad \text{uniformemente para } x \in \Omega \text{ q.t.p.} \quad (8)$$

uma condição mais fraca que (3) com  $\mu > 0$ . Assim, no Teorema 2.2 vamos demonstrar que se  $F$  satisfaz (6) então o problema (1) tem solução não-trivial  $u \in H_0^1(\Omega)$  desde que:

- (i)  $F$  satisfaça (7) com  $\lambda_j < L(x)$  em um conjunto de medida positiva; ou
- (ii)  $F$  satisfaça (8) com  $K(x) < \lambda_{j+1}$  em um conjunto de medida positiva.

Na demonstração dos Teoremas 2.1 e 2.2, utilizaremos o Princípio Geral Minimax, que será enunciado e provado no capítulo 1.

No *Apêndice A*, enunciamos alguns resultados utilizados neste trabalho.

No *Apêndice B*, enunciamos algumas propriedades da Teoria do Grau, as quais utilizamos na prova dos Teoremas 2.1 e 2.2

# Capítulo 1

## Teorema de Deformação e princípio geral minimax

Neste capítulo vamos provar o Teorema de Deformação usando a condição de Cerami, definida a seguir, que desempenha um papel fundamental na aplicação de argumentos tipo Ljusternik-Schnirelmann para a busca de pontos críticos de funcionais em espaços de Banach. Terminamos o capítulo demonstrando um teorema geral de ponto crítico devido a Bartolo et al [12], dessa forma, usaremos esse teorema no Capítulo 2, para garantir a existência de solução não-trivial para o problema (1).

Vamos introduzir algumas notações. Denotemos por  $X$  um espaço de Banach real e  $X'$  o dual.

Se  $f$  é uma aplicação contínua Fréchet diferenciável de  $X$  em  $\mathbb{R}$ , ou seja,

$$f \in C^1(X, \mathbb{R}),$$

$f'(u)$  denota a derivada de Fréchet de  $f$  no ponto  $u \in X$ .

Na literatura, os teoremas de deformação foram provados nos casos em que  $f \in C^1(X, \mathbb{R})$  satisfazia a condição de Palais-Smale. Essa condição pode ser expressa como segue:

$f$  satisfaz a condição de Palais-Smale no intervalo  $(c_1, c_2)$ , onde  $-\infty \leq c_1 < c_2 \leq +\infty$ , se

(i) toda sequência limitada  $\{u_n\} \subset f^{-1}(c_1, c_2)$ , com  $\{f(u_n)\}$  limitada e  $f'(u_n) \rightarrow 0$ , possui uma subsequência convergente, e

(ii)  $\{u_n\} \subset f^{-1}(c_1, c_2)$ ,  $\{f(u_n)\}$  limitada e  $\|u_n\| \rightarrow +\infty$  quando  $n \rightarrow +\infty$  então  $\|f'(u_n)\| \geq \alpha > 0$  para  $n$  suficientemente grande.

Agora, vamos definir a condição de Cerami, que será utilizada na demonstração do Teorema de Deformação.

**Definição 1.1.** Diremos que  $f \in C^1(X, \mathbb{R})$  satisfaz a condição de Cerami  $(C)$  em  $(c_1, c_2)$  com  $-\infty \leq c_1 < c_2 \leq +\infty$  se

(i)' dada uma sequência limitada  $\{u_n\} \subset f^{-1}(c_1, c_2)$ , com  $\{f(u_n)\}$  limitada e  $f'(u_n) \rightarrow 0$ , então  $\{u_n\}$  possui uma subsequência convergente, e

(ii)' dado  $c \in (c_1, c_2)$  existem  $\sigma, R, \alpha > 0$  tais que  $[c - \sigma, c + \sigma] \subset (c_1, c_2)$  e para todo  $u \in f^{-1}([c - \sigma, c + \sigma])$ ,  $\|u\| \geq R$  temos que  $\|f'(u)\| \cdot \|u\| \geq \alpha$ .

Observemos que uma condição similar a  $(C)$  foi introduzida por Cerami em [8] e aplicada à busca de pontos críticos de um funcional em uma Variedade Rimaniana (confira [9]).

Vamos provar que a condição  $(C)$  é suficiente para obter um Teorema da Deformação. Para isso, definiremos alguns conjuntos:

Sejam

$$\tilde{X} = \{u \in X : f'(u) \neq 0\}$$

e para  $c \in \mathbb{R}$ ,

$$A_c = \{u \in X : f(u) \leq c\}, \quad K_c = \{u \in X : f'(u) = 0, f(u) = c\}.$$

Utilizaremos o seguinte lema,

**Lema 1.1.** Se  $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ , então existe uma aplicação localmente Lipschitz contínua  $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$  satisfazendo as seguintes condições:

$$\|\phi(u)\| \leq \frac{2}{\|f'(u)\|} \quad \text{e} \quad \langle f'(u), \phi(u) \rangle \geq 1, \quad \forall u \in \tilde{X}. \quad (1.1)$$

**Prova:** Seja  $u \in \tilde{X}$ , logo  $u \in X$  tal que  $f'(u) \neq 0$ . Como  $f \in C^1(X, \mathbb{R})$  obtemos

$$\|f'(u)\| = \sup_{\|w\|=1} \langle f'(u), w \rangle.$$

Dessa forma, dados  $\epsilon > 0$  e  $x \in \tilde{X}$  existe  $y_{x\epsilon} \in X$  tal que  $\|y_{x\epsilon}\| = 1$  e  $\|f'(u)\| - \epsilon < \langle f'(u), y_{x\epsilon} \rangle$ . Tomemos  $\epsilon = \frac{\|f'(u)\|}{3} > 0$  pois,  $f'(u) \neq 0$ . Assim

$$\|f'(u)\| - \frac{\|f'(u)\|}{3} < \langle f'(u), y_{x\epsilon} \rangle \quad \text{o que implica} \quad \frac{2}{3}\|f'(u)\| < \langle f'(u), y_{x\epsilon} \rangle.$$

Definimos a função  $l : \tilde{X} \rightarrow X$  tal que  $l(u) = \frac{f'(u)}{\|f'(u)\|^2}$ . Agora, tomemos  $u_v = \frac{3}{2}\|l(u)\| \cdot y_{x\epsilon}$ . Afirmamos que  $u_v$  é um vetor pseudo-gradiente para  $f$  em  $u \in \tilde{X}$ . De fato,

$$\|u_v\| = \left\| \frac{3}{2}\|l(u)\| \cdot y_{x\epsilon} \right\| = \frac{3}{2}\|l(u)\| < 2\|l(u)\|.$$

Assim,  $\|u_v\| < 2 \left\| \frac{f'(u)}{\|f'(u)\|^2} \right\| = \frac{2}{\|f'(u)\|}$ , logo  $\|u_v\| < \frac{2}{\|f'(u)\|}$ .

Além disso

$$\begin{aligned} \langle f'(u), u_v \rangle &= \left\langle f'(u), \frac{3}{2} \|l(u)\| \cdot y_{x_\epsilon} \right\rangle = \frac{3}{2} \|l(u)\| \langle f'(u), y_{x_\epsilon} \rangle \\ &> \frac{3}{2} \|l(u)\| \frac{2}{3} \|f'(u)\| = \|l(u)\| \cdot \|f'(u)\| = \left\| \frac{f'(u)}{\|f'(u)\|^2} \right\| \cdot \|f'(u)\| = 1. \end{aligned}$$

logo,  $\langle f'(u), u_v \rangle > 1$ . Como  $\tilde{X}$  é um conjunto aberto, existe uma vizinhança aberta  $V_v$  de  $v$  com  $V_v \subset \tilde{X}$  tal que

$$\|h_v\| < \frac{2}{\|f'(w)\|} \text{ e } \langle f'(w), h_v \rangle > 1 \text{ para todo } w \in V_v.$$

Agora tomemos  $V = \{V_v : v \in \tilde{X}\}$  uma cobertura aberta de  $\tilde{X}$ . Observe que  $\tilde{X}$  é um espaço métrico completo, logo  $\tilde{X}$  é paracompacto. Dessa forma, para cada  $\tau \in \Gamma$  existe  $v \in \tilde{X}$  tal que  $V_{v_\tau} \subset V_v$ . Assim

$$\|u_v\| < \frac{2}{\|f'(w)\|} \text{ e } \langle f'(w), u_v \rangle > 1 \text{ para todo } w \in V_{v_\tau}.$$

Para cada  $\tau \in \Gamma$  defina  $\alpha_\tau : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\alpha_\tau(w) = d(w, X \setminus V_{v_\tau})$ . Definimos também a função  $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$  por

$$\phi(w) = \sum_{\tau \in \Gamma} \left( \frac{\alpha_\tau(w)}{\sum_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma(w)} \cdot u_\tau \right)$$

com  $u_\tau = \frac{3}{2} \|l(u_\tau)\| \cdot y_{x_\tau}$ . Observemos que

$$\alpha_\tau(w) = 0 \text{ se } w \in \tilde{X} \setminus V_{v_\tau} \text{ e } \alpha_\tau(w) = d(w, \tilde{X} \setminus V_{v_\tau}) \text{ se } w \in V_{v_\tau}.$$

Pela definição de paracompacidade, a cobertura aberta  $V = \{V_v : v \in \tilde{X}\}$  de  $\tilde{X}$  é localmente finita, assim dado  $w \in \tilde{X}$  existe um número finito de índices  $q_w$  tais que  $\tau \in \Gamma$  e  $\alpha_\tau(w) \neq 0$ . Logo

$$\phi(w) = \sum_{\tau \in \Gamma} \left( \frac{\alpha_\tau(w)}{\sum_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma(w)} \cdot u_\tau \right) = \sum_{k=1}^{q_w} \left( \frac{\alpha_{\tau_k}(w)}{\sum_{p=1}^{q_w} \alpha_{\tau_p}(w)} \cdot u_\tau \right).$$



Dessa forma

$$\begin{aligned} \|\phi(w)\| &= \left\| \sum_{k=1}^{q_w} \left( \frac{\alpha_{\tau_k}(w)}{\sum_{p=1}^{q_w} \alpha_{\gamma_p}(w)} \cdot u_\tau \right) \right\| \leq \sum_{k=1}^{q_w} \left( \frac{\alpha_{\tau_k}(w)}{\sum_{p=1}^{q_w} \alpha_{\gamma_p}(w)} \right) \cdot \|u_\tau\| \\ &= 1 \cdot \|u_\tau\| = \|u_\tau\| < \frac{2}{\|f'(w)\|} \end{aligned}$$

além disso

$$\begin{aligned} \langle f'(w), \phi(w) \rangle &= \langle f'(w), \sum_{k=1}^{q_w} \left( \frac{\alpha_{\tau_k}(w)}{\sum_{p=1}^{q_w} \alpha_{\gamma_p}(w)} \cdot u_\tau \right) \rangle = \sum_{k=1}^{q_w} \left( \frac{\alpha_{\tau_k}(w)}{\sum_{p=1}^{q_w} \alpha_{\gamma_p}(w)} \right) \langle f'(w), u_\tau \rangle \\ &= 1 \cdot \langle f'(w), u_\tau \rangle = \langle f'(w), u_\tau \rangle > 1. \end{aligned}$$

Logo,  $\phi(w)$  é um vetor pseudo-gradiente para  $f$  em  $w$ . Além disso,  $\phi$  é uma soma finita de funções que são localmente Lipschitziana, para uma determinada vizinhança. Assim, existe uma vizinhança onde  $\phi$  é localmente Lipschitziana. Dessa forma,  $\phi$  é um campo pseudo-gradiente para  $f$  em  $\tilde{X}$ .

## 1.1 Teorema de Deformação

O Teorema de Deformação garante a existência de um homeomorfismo limitado  $\eta : X \rightarrow X$  tal que podemos deformar o conjunto  $A_{c+\epsilon}$  no conjunto  $A_{c-\epsilon}$ , sob certas condições em  $c \in \mathbb{R}$ . Vamos apresentar o Teorema de Deformação que encontra-se em [12].

**Teorema 1.1. (Teorema de Deformação)** Seja  $X$  um espaço de Banach real e seja  $f \in C^1(X, \mathbb{R})$  satisfazendo a condição  $(C)$  em  $(c_1, c_2)$ . Se  $c \in (c_1, c_2)$  e  $N$  é uma vizinhança qualquer de  $K_c$ , então existem um homeomorfismo limitado  $\eta$  de  $X$  em  $X$  e constantes  $\bar{\epsilon} > \epsilon > 0$  tal que  $[c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}] \subset (c_1, c_2)$ , satisfazendo as seguintes propriedades:

$$\eta(A_{c+\epsilon} \setminus N) \subset A_{c-\epsilon}, \quad (1.2)$$

$$\eta(A_{c+\epsilon}) \subset A_{c-\epsilon} \text{ se } K_c = \emptyset \quad (1.3)$$

$$\eta(x) = x \text{ se } x \notin f^{-1}([c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}]). \quad (1.4)$$

**Prova:** Seja  $c \in (c_1, c_2)$ . Suponhamos que  $K_c \neq \emptyset$ . Primeiro observemos que, pela condição (C),  $K_c$  é compacto. De fato, seja  $u \in K_c$  então,

$$u \in X \text{ tal que } f'(u) = 0 \text{ e } f(u) = c.$$

Notemos que,  $u \in f^{-1}(c)$  e  $c \in (c_1, c_2)$ . Se  $\|u\| \geq R$ , onde  $R > 0$ , teríamos pela condição (ii)' que  $\|f'(u)\| \cdot \|u\| \geq \alpha$  com  $\alpha > 0$ . Sendo  $f'(u) = 0$ , obteríamos  $0 \geq \alpha$ , absurdo. Logo, o conjunto  $K_c$  é limitado.

Assim, dada uma sequência  $(u_k) \subset K_c$ , temos que  $f'(u_k) = 0$  e  $f(u_k) = c$ , além disso, a sequência  $(u_k)$  é limitada, pois o conjunto  $K_c$  é limitado. Pela condição (i), a sequência  $(u_k)$  possui uma subsequência convergente, digamos  $u_{k_n} \rightarrow u$ . Afirmamos que  $u \in K_c$ . De fato, como  $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ , obtemos

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'(u_{k_n}) = f'(u) \text{ e } c = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_{k_n}) = f(u),$$

assim,  $u \in K_c$ . Logo,  $K_c$  é compacto.

Seja  $M_\lambda$  o aberto  $\lambda$ -vizinhança de  $K_c$ , ou seja,

$$M_\lambda = \{u \in X : d(u, K_c) < \lambda\}$$

onde  $\lambda > 0$  e  $d(u, K_c)$  denota a distância de  $u$  ao conjunto  $K_c$ . Vamos provar (1.2). Sendo  $K_c$  compacto, tomemos  $\delta > 0$  tal que  $N = M_\delta$ .

A hipótese (i) implica que existem  $\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, b, b_1 > 0$  tais que

$$\|f'(u)\| > b, \quad \forall u \in (A_{c+\bar{\epsilon}_1} \setminus A_{c-\bar{\epsilon}_1}) \cap (M_\delta \setminus M_{\delta/8}) \quad (1.5)$$

$$\|f'(u)\| > b_1, \quad \forall u \in (A_{c+\bar{\epsilon}_2} \setminus A_{c-\bar{\epsilon}_2}) \cap (B_R \setminus M_{\delta/8}) \quad (1.6)$$

Suponhamos que (1.6) não ocorre, então existem sequências

$$b_k \rightarrow 0, \quad \epsilon_k \rightarrow 0 \text{ e } u_k \in (A_{c+\epsilon_k} \setminus A_{c-\epsilon_k}) \cap (B_R \setminus M_{\delta/8}) \text{ com } \|f'(u_k)\| \leq b_k.$$

Assim,  $c - \epsilon_k < f(u_k) \leq c + \epsilon_k$  e como  $\|f'(u_k)\| \leq b_k$  fazendo  $k \rightarrow +\infty$  obtemos

$$f(u_k) \rightarrow c \text{ e } f'(u_k) \rightarrow 0.$$

Sendo  $\|u_k\| \leq R$ ,  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  é limitada, por (i) existe uma subsequência convergente,  $u_{k_n} \rightarrow u$ . Daí,

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'(u_{k_n}) = f'(u) \text{ e } c = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_{k_n}) = f(u),$$

assim,  $u \in K_c$ . Por outro lado, como  $(u_k) \not\subset M_{\delta/8}$  temos que

$$\frac{\delta}{8} \leq d(u_{k_n}, K_c) \leq d(u_{k_n}, a), \text{ onde } a \in K_c.$$

Sendo  $u_{k_n} \rightarrow u$ , obtemos  $\frac{\delta}{8} \leq d(u, a)$  o que implica  $u \notin M_{\delta/8}$ . Mas,  $K_c \subset M_{\delta/8}$ .

De fato, pois caso contrário existiria  $v \in K_c$  com  $v \notin M_{\delta/8}$ . Assim,

$$\frac{\delta}{8} \leq d(v, K_c) \leq d(v, y) \text{ com } y \in K_c.$$

Tomando  $y = v$ , obtemos  $\frac{\delta}{8} \leq 0$ , absurdo!

Da mesma forma, se não tivermos (1.5), então existiriam sequências

$$b_k \rightarrow 0, \epsilon_k \rightarrow 0 \text{ e } u_k \in (A_{c+\epsilon_k} \setminus A_{c-\epsilon_k}) \cap (M_\delta \setminus M_{\delta/8}) \text{ com } \|f'(u_k)\| \leq b_k.$$

Assim,  $c - \epsilon_k < f(u_k) \leq c + \epsilon_k$  e como  $\|f'(u_k)\| \leq b_k$  fazendo  $k \rightarrow +\infty$  obtemos

$$f(u_k) \rightarrow c \text{ e } f'(u_k) \rightarrow 0.$$

Como  $u_k \in M_\delta$  temos que  $d(u_k, u) := \|u_k - u\| < \lambda$ , para todo  $u \in K_c$ . Sendo  $K_c$  limitado, em particular é compacto, segue que  $\|u\| \leq c$ , onde  $c$  é uma constante. Daí,  $\|u_k\| \leq \|u_k - u\| + \|u\| < \lambda + c$ , logo  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  é limitada. Por (i),  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  possui uma subsequência convergente, digamos  $u_{k_n} \rightarrow z$ . Sendo  $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ , obtemos

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'(u_{k_n}) = f'(z) \text{ e } c = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_{k_n}) = f(z),$$

logo,  $z \in K_c$ . Assim, chegaríamos no mesmo absurdo da demonstração do item (1.6), uma vez que  $K_c \subset M_{\delta/8}$ .

Por (ii)' existe  $\bar{\epsilon}_3 < \min \left\{ \frac{b\delta}{8}, \sigma \right\}$  tal que

$$\|f'(u)\| > 0, \quad \forall u \in (A_{c+\bar{\epsilon}_3} \setminus A_{c-\bar{\epsilon}_3}) \setminus M_{\delta/8}. \quad (1.7)$$

De fato, se não ocorresse (1.7), existiria  $u_0 \in (A_{c+\bar{\epsilon}_3} \setminus A_{c-\bar{\epsilon}_3}) \setminus M_{\delta/8}$  com  $\|f'(u_0)\| = 0$ . Assim,  $c - \bar{\epsilon}_3 < f(u_0) \leq c + \bar{\epsilon}_3$ , isto é,  $u_0 \in f^{-1}((c - \bar{\epsilon}_3, c + \bar{\epsilon}_3])$ . Se  $\|u_0\| \geq R$ , onde  $R > 0$ , então por (ii)', teríamos  $\|f'(u_0)\| \cdot \|u_0\| \geq \alpha$ , com  $\alpha > 0$ . Mas,  $f'(u_0) = 0$  e portanto  $0 \geq \alpha$  o que é um absurdo. Tomando  $\bar{\epsilon} < \min\{\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_3\}$ , temos que valem as expressões (1.5), (1.6) e (1.7) com  $\bar{\epsilon}$ .

Seja  $0 < \epsilon < \bar{\epsilon}$  e consideremos os conjuntos

$$A = \{u \in X : f(u) \geq c + \bar{\epsilon} \text{ ou } f(u) \leq c - \bar{\epsilon}\} \text{ e}$$

$$B = \{u \in X : c - \epsilon \leq f(u) \leq c + \epsilon\}$$

Definimos a função,

$$\chi_1(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Notemos que

$$\chi_1(x) = 0, \forall x \in A, \quad \chi_1(x) = 1, \forall x \in B \text{ e } 0 \leq \chi_1(x) \leq 1, \forall x \in X.$$

A função  $\chi_1(x)$  é localmente Lipschitz contínua. De fato, dados  $x, y \in X$ , notemos que,

$$\begin{aligned} |\chi_1(x) - \chi_1(y)| &= \left| \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)} - \frac{d(y, A)}{d(y, A) + d(y, B)} \right| \\ &= \left| \frac{d(x, A)[d(y, A) + d(y, B)] - d(y, A)[d(x, A) + d(x, B)]}{[d(x, A) + d(x, B)][d(y, A) + d(y, B)]} \right| \\ &= \left| \frac{d(x, A) \cdot d(y, B) - d(y, A) \cdot d(x, B)}{[d(x, A) + d(x, B)][d(y, A) + d(y, B)]} \right| \\ &= \left| \frac{d(x, A) \cdot d(y, B) - d(y, A) \cdot d(y, B) + d(y, A) \cdot d(y, B) - d(y, A) \cdot d(x, B)}{[d(x, A) + d(x, B)][d(y, A) + d(y, B)]} \right| \\ &= \left| \frac{d(y, B)[d(x, A) - d(y, A)] + d(y, A)[d(y, B) - d(x, B)]}{[d(x, A) + d(x, B)][d(y, A) + d(y, B)]} \right| \\ &\leq \frac{d(x, y)|d(y, A) + d(y, B)|}{|d(x, A) + d(x, B)||d(y, A) + d(y, B)|} \\ &= \frac{d(x, y)}{d(x, A) + d(x, B)}. \end{aligned}$$

Daí, dado  $z \in X$ , temos que

$$d(z, A) + d(z, B) > 0.$$

Logo, existe  $k > 0$  e uma vizinhança  $V$  de  $z$  tal que

$$d(x, A) + d(x, B) \geq \frac{1}{k} > 0, \quad \forall x \in V.$$

Portanto,

$$|\chi_1(x) - \chi_1(y)| \leq kd(x, y),$$

o que mostra que  $\chi_1$  é localmente Lipschitz. Da mesma forma, existe uma função localmente Lipschitz contínua  $\chi_2$  com

$$\chi_2(x) = 1, \quad \forall x \in X \setminus M_{\delta/4}, \quad \chi_2(x) = 0, \quad \forall x \in M_{\delta/8} \quad \text{e} \quad 0 \leq \chi_2(x) \leq 1, \quad \forall x \in X.$$

Então, a função

$$\chi(x) = \chi_1(x) \cdot \chi_2(x), \quad \forall x \in X$$

definida por

$$\chi : X \rightarrow [0, 1] \quad \text{tal que} \quad \chi(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } u \notin f^{-1}([c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}]) \quad \text{ou } u \in M_{\delta/8} \\ 1, & \text{se } u \in f^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]) \quad \text{e } u \notin M_{\delta/8} \end{cases} \quad (1.8)$$

é localmente Lipschitz contínua.

Consideremos a aplicação  $V : X \rightarrow X$  definida por

$$V(u) = \begin{cases} -\chi(u) \cdot \phi(u), & u \in \tilde{X} \\ 0, & u \notin \tilde{X}, \end{cases} \quad (1.9)$$

onde  $\phi$  é a função definida no Lema 1.1. Notemos que  $V$  é uma aplicação localmente Lipschitz contínua em  $X$ . Assim, pelo Lema 1.1,

$$\|V(u)\| \leq \frac{2}{\|f'(u)\|}, \quad \forall u \in \tilde{X}. \quad (1.10)$$

Vamos mostrar que

$$\|V(u)\| \leq k_1 + k_2\|u\|, \quad (1.11)$$

onde  $k_1, k_2 > 0$  são independentes de  $u \in X$ . Se  $u \notin f^{-1}([c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}]) \setminus M_{\delta/8}$ , temos que  $\chi(u) = 0$ , assim  $V(u) = 0$ . Logo,

$$0 = \|V(u)\| \leq k_1 + k_2\|u\| \quad \text{onde } k_1, k_2 > 0.$$

Se  $u \in f^{-1}([c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}]) \setminus M_{\delta/8}$ , observemos dois casos:

(1<sup>a</sup>)  $\|u\| \geq R$ : sendo  $\bar{\epsilon} < \sigma$ , a condição (ii)' de (C) implica que,

$$\|f'(u)\| \cdot \|u\| \geq \alpha \quad \Rightarrow \quad \|f'(u)\| \geq \frac{\alpha}{\|u\|}.$$

Por (1.10) obtemos

$$\|V(u)\| \leq \frac{2}{\alpha} \|u\| \leq k_1 + k_2 \|u\|;$$

onde  $k_1 > 0$  e  $k_2 = \frac{2}{\alpha} > 0$ .

(2<sup>a</sup>)  $\|u\| < R$ : então, por (1.6) existe  $b_1 > 0$  tal que

$$\|f'(u)\| > b_1$$

usando novamente (1.10) e a desigualdade acima, temos que

$$\|V(u)\| \leq \frac{2}{\|f'(u)\|} < \frac{2}{b_1}$$

daí,  $\|V(u)\|$  é limitada.

Por (1<sup>a</sup>) e (2<sup>a</sup>) concluímos que

$$\|V(u)\| \leq k_1 + k_2 \|u\| \text{ onde } k_1, k_2 > 0 \text{ são independentes de } u \in X.$$

Agora, consideremos o problema de valor inicial

$$\frac{d\eta}{dt} = V(\eta) \text{ e } \eta(0) = x \text{ onde } x \in X.$$

Como  $V$  é localmente Lipschitz contínua, para cada valor inicial  $x \in X$ , o problema de valor inicial possui uma única solução  $\eta(\cdot, x)$ . Por (1.11), a solução é definida em  $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ .

Fixemos  $t \in \mathbb{R}^+$ , pelo Teorema de Picard (conforme [16]) e usando (1.11), a aplicação

$$\eta(t, \cdot) : X \rightarrow X$$

é um homeomorfismo limitado de  $X$  em  $X$ .

Consideremos  $\eta(t, x) = x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ .

Assim,

$$\frac{d\eta}{dt} = 0$$

e para

$$x \notin f^{-1}([c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}]) \text{ ou } x \in M_{\delta/8},$$

obtemos

$$V(\eta(t, x)) = V(x) = 0.$$

Dessa forma,  $\eta$  satisfaz o problema de valor inicial. Assim, para cada  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $\eta(t, \cdot)$  satisfaz (1.4). Resta provarmos que existe  $\bar{t}$  tal que  $\eta(\bar{t}, \cdot)$  satisfaz (1.2). Primeiro vamos provar que

(\*) para cada  $x \in X$  a aplicação definida por

$$s_x(t) = f(\eta(t, x)), \quad t \in \mathbb{R}^+$$

é não-crescente em  $\mathbb{R}^+$ . De fato, para  $t > 0$ :

$$\frac{d}{dt}s_x(t) = \left\langle f'(\eta(t, x)), \frac{d}{dt}\eta(t, x) \right\rangle = \langle f'(\eta(t, x)), V(\eta(t, x)) \rangle.$$

Então, se  $\eta(t, x) \notin \tilde{X}$  temos que  $V(\eta(t, x)) = 0$ , assim  $\frac{d}{dt}s_x(t) = 0$ . Se  $\eta(t, x) \in \tilde{X}$ , então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}s_x(t) &= \left\langle f'(\eta(t, x)), \frac{d}{dt}\eta(t, x) \right\rangle = \langle f'(\eta(t, x)), V(\eta(t, x)) \rangle \\ &= \langle f'(\eta(t, x)), -\chi(\eta(t, x)) \cdot \phi(\eta(t, x)) \rangle = -\chi(\eta(t, x)) \langle f'(\eta(t, x)), \phi(\eta(t, x)) \rangle. \end{aligned}$$

Usando o Lema 1.1, temos que

$$\frac{d}{dt}s_x(t) = -\chi(\eta(t, x)) \langle f'(\eta(t, x)), \phi(\eta(t, x)) \rangle \leq -\chi(\eta(t, x)) \leq 0.$$

Portanto,

$$s_x(t) = f(\eta(t, x)), \quad t \in \mathbb{R}^+$$

é não-crescente em  $\mathbb{R}^+$ . Para provarmos (1.2) consideremos o conjunto

$$Y = (A_{c+\epsilon} \setminus A_{c-\epsilon}) \setminus M_\delta$$

e vamos mostrar que

$$\exists \bar{t} > 0 \text{ tal que } \forall x \in Y, \quad \eta(\bar{t}, x) \in A_{c-\epsilon}.$$

Para isso, definimos o conjunto

$$Z = (A_{c+\epsilon} \setminus A_{c-\epsilon}) \setminus M_{\delta/2}.$$

Mostraremos primeiro que

(\*\*) para cada  $x \in Y$ , existe  $t_x \leq 2\epsilon$  tal que  $\eta(t_x, x) \in Z$ .

## 1. Teorema de Deformação e princípio geral minimax

---

De fato, seja  $x \in Y$  e  $t > 0$  tal que  $\eta(w, x) \in Z$ ,  $\forall w \in [0, t]$ . Vamos provar que  $t < 2\epsilon$ . Por (1.7)  $Z \subset \tilde{X}$ . Pois, tomando  $z \in Z$  temos que  $z \in A_{c+\epsilon} \setminus A_{c-\epsilon}$  e  $z \notin M_{\delta/2}$ . Notemos que,

$$\frac{\delta}{2} \leq d(z, K_c) \quad \text{mas,} \quad \frac{\delta}{8} \leq \frac{\delta}{2} \leq d(z, K_c) \quad \text{de onde segue que } z \notin M_{\delta/8}.$$

Assim,

$$z \in (A_{c+\epsilon} \setminus A_{c-\epsilon}) \setminus M_{\delta/8}.$$

Usando (1.7),  $\|f'(z)\| > 0$ , isto é,  $f'(z) \neq 0$ . Logo,  $z \in \tilde{X}$ . Assim,  $Z \subset \tilde{X}$ . Dessa forma,  $\eta(w, x) \in Z \subset \tilde{X}$ ,  $\forall w \in [0, t]$ , além disso, como  $\eta(w, x) \in Z$ , então

$$\eta(w, x) \in (A_{c+\epsilon} \setminus A_{c-\epsilon}) \quad \text{e} \quad \eta(w, x) \notin M_{\delta/2}.$$

Observemos que,

$$\frac{\delta}{4} \leq \frac{\delta}{2} \leq d(\eta(w, x), K_c) \quad \Rightarrow \quad \eta(w, x) \notin M_{\delta/4}.$$

Assim,  $\eta(w, x) \in (A_{c+\epsilon} \setminus A_{c-\epsilon}) \setminus M_{\delta/4}$ . Por (1.8),  $\chi(\eta(w, x)) = 1$  e usando o Lema (1.1) temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}s_x(w) &= -\chi(\eta(t, w)) \langle f'(\eta(t, w)), \phi(\eta(t, w)) \rangle \\ &= -\langle f'(\eta(t, w)), \phi(\eta(t, w)) \rangle \leq -1 \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}s_x(w) \leq -1 \quad \forall w \in [0, t]. \end{aligned}$$

Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo,

$$s_x(0) - s_x(t) = - \int_0^t \frac{d}{dw}s_x(w)dw \geq \int_0^t dw = t. \quad (1.12)$$

Observemos que, como  $s_x(t) = f(\eta(t, x))$ ,  $s_x(0) = f(\eta(0, x))$  e sendo  $\eta(t, x) \in Z$ , segue que

$$c - \epsilon < s_x(t) \leq c + \epsilon \quad \text{e} \quad c - \epsilon < s_x(0) \leq c + \epsilon$$

o que implica

$$s_x(0) - s_x(t) < c + \epsilon - (c - \epsilon) = 2\epsilon.$$

Pela desigualdade acima e usando (1.12), obtemos

$$t < 2\epsilon,$$



o que prova (\*\*). Consideremos o caso em que a órbita  $\eta(\cdot, x)$   $x \in Y$ , entra em  $M_{\delta/2}$ .

Seja  $t_2$  o primeiro instante em que  $\eta(\cdot, x) \in \partial M_{\delta/2}$ . Vamos mostrar que,

(\*\*\*) existe um instante  $t_0 \leq t_2$  tal que  $\eta(t_0, x) \in A_{c-\epsilon}$ .

Para provarmos (\*\*\*) argumentamos por contradição. De fato, suponhamos que (\*\*\*) não seja verdade, ou seja,

$$\text{para todo } t \in [0, t_2] \text{ temos que } \eta(t, x) \notin A_{c-\epsilon}.$$

Observemos que,  $t \leq t_2$ , temos  $\eta(t, x) \notin M_{\delta/2}$ . Além disso,  $x \in Y$ , temos que  $f(x) \leq c + \epsilon$ , e sendo  $t \geq 0$ , a função  $f(\eta(t, x))$  é não-decrescente então,

$$f(\eta(t, x)) \leq f(\eta(0, x)) = f(x) \leq c + \epsilon$$

e como  $\eta(t, x) \notin A_{c-\epsilon}$ , temos que

$$\eta(t, x) \in (A_{c+\epsilon} \setminus A_{c-\epsilon}) \setminus M_{\delta/2} = Z.$$

Logo, por (\*\*), obtemos

$$t_2 < 2\epsilon. \quad (1.13)$$

Por outro lado, seja  $t_1$  o último instante antes de  $t_2$  em que  $\eta(\cdot, x) \in \partial M_\delta$ . Notemos que

$$\eta(t, x) \in (A_{c+\epsilon} \setminus A_{c-\epsilon}) \cap (M_\delta \setminus M_{\delta/2}), \quad \forall t \in (t_1, t_2].$$

e por (1.5) temos que

$$\|f'(\eta(t, x))\| > b, \quad \forall t \in [t_1, t_2].$$

Além disso,  $\chi(\eta(t, x)) = 1$ .

Então, usando o Lema (1.1), podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{2} &\leq \|\eta(t_2, x) - \eta(t_1, x)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} V(\eta(t, x)) dt \right\| \\ &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} [-\chi(\eta(t, x)) \cdot \phi(\eta(t, x))] dt \right\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|\phi(\eta(t, x))\| dt \leq \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{\|f'(\eta(t, x))\|} dt \\ &< \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{b} dt = \frac{2}{b}(t_2 - t_1) < \frac{2}{b}t_2 \\ &\Rightarrow t_2 > \frac{b\delta}{4}. \end{aligned}$$

Usando  $\bar{\epsilon} < \min \left\{ \frac{b\delta}{8}, \sigma \right\}$  na última desigualdade, segue que

$$t_2 > 2\bar{\epsilon} > 2\epsilon,$$

mas isto contradiz (1.13). Portanto, vale (\*\*). Por (\*\*) e (\*\*\*) concluímos que para cada  $x \in Y$  existe  $t_x$  tal que  $\eta(t_x, x) \in A_{c-\epsilon}$ . Em qualquer caso, podemos escolher  $t_x \leq 2\epsilon$ . Finalmente em seguida tomando  $\bar{t} = 2\epsilon$ , temos que existe  $\bar{t} > 0$  tal que para todo  $x \in Y$   $\eta(\bar{t}, x) \in A_{c-\epsilon}$  e o teorema está provado. ■

O próximo resultado garante que o funcional  $J : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por  $J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx$  possui um valor crítico, este fato será crucial para mostrarmos que o problema (1) tem solução não-trivial. Para mostrarmos o teorema abaixo utilizaremos o teorema anterior.

## 1.2 Teorema Geral Minimax

**Teorema 1.2. (Bartolo et al [12])** Seja  $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ , onde  $X$  é um espaço de Hilbert satisfazendo a condição  $(C)_c$  para todo  $c > 0$  e suponha que existam um subconjunto fechado  $S \subset X$  e  $Q \subset X$ , com a fronteira de  $Q$ , limitada satisfazendo as seguintes condições:

1.  $\sup_{u \in \partial Q} J(u) \leq \alpha < \beta \leq \inf_{u \in S} J(u)$  para  $0 \leq \alpha < \beta$ ;
2.  $S$  e  $\partial Q$  estão linkados;
3.  $\sup_{u \in Q} J(u) < +\infty$ .

Então,  $J$  possui um valor crítico  $c \geq \beta$ .

**Prova:** Suponhamos por absurdo que  $c$  não é um valor crítico, isto é,  $K_c = \emptyset$ . Pelo Teorema de Deformação dado  $\epsilon > 0$  com  $\epsilon < c - \beta$ , existe um homeomorfismo limitado  $\eta : X \rightarrow X$  tal que

$$\begin{aligned} \eta(A_{c+\epsilon}) &\subset A_{c-\epsilon} \text{ se } K_c = \emptyset \text{ e} \\ \eta(x) &= x \text{ se } x \notin J^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]). \end{aligned}$$

Observemos que  $c = \inf_{h \in \Gamma} \sup_{u \in Q} J(h(u))$  onde  $\Gamma = \{h \in C(X, X) : h(x) = x, x \in \partial Q\}$ .

Assim, existe  $g \in \Gamma$  tal que  $\sup_{u \in Q} J(g(u)) \leq c + \epsilon$ . Agora consideremos  $\Phi(u) = \eta(g(u))$ .

Pela hipótese,  $\sup_{u \in \partial Q} J(u) < \beta$ , assim  $\sup_{u \in \partial Q} J(u) < \beta < c - \epsilon$ . Dessa forma,

$$J(u) \notin [c - \epsilon, c + \epsilon], \text{ ou seja, } u \notin J^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]).$$

Logo,  $\Phi(u) = \eta(g(u)) = \eta(u) = u$ , com  $u \in \partial Q$ . Assim,  $\Phi \in \Gamma$ . Notemos que,  $J(g(u)) \leq \sup_{u \in Q} J(g(u)) \leq c + \epsilon$ , o que implica  $J(g(u)) \leq c + \epsilon$ , daí  $g(u) \in A_{c+\epsilon}$ . Usando novamente o Teorema de Deformação,  $\Phi(u) = \eta(g(u)) \in A_{c-\epsilon}$ , logo  $J(\Phi(u)) \leq c - \epsilon$ , obtemos  $\sup_{u \in Q} J(\Phi(u)) \leq c - \epsilon$ . Como  $c = \inf_{h \in \Gamma} \sup_{u \in Q} J(h(u))$ , temos que  $c \leq \sup_{u \in Q} J(\Phi(u)) \leq c - \epsilon$ , assim  $c \leq c - \epsilon$ , o que é um absurdo.

## Capítulo 2

# Problemas elípticos não quadráticos no infinito

Neste capítulo, nosso objetivo é garantir a existência de solução não-trivial para o problema (1). Para isso, vamos provar alguns lemas que serão utilizados na demonstração dos teoremas 2.1 e 2.2.

Algumas notações que iremos utilizar durante o capítulo:

Denotemos por  $|E|$  a medida de Lebesgue de um conjunto mensurável  $E \subset \mathbb{R}^N$ , por  $\|\cdot\|_p$  a norma em  $L^p(\Omega)$  e por  $\|\cdot\|$  a norma em  $H_0^1(\Omega)$  induzida pelo produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega).$$

A condição que vamos utilizar é do tipo Palais-Smale introduzida por Cerami em [8], a saber; dizemos que  $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ , com  $X$  um espaço de Banach real, satisfaz a (condição de Cerami no nível  $c \in \mathbb{R}$ )  $(C)_c$  se:

$(C)_c(i)$  toda sequência limitada  $(u_n) \subset X$ , tal que  $J(u_n) \rightarrow c$  e  $J'(u_n) \rightarrow 0$ , possui uma subsequência convergente;

$(C)_c(ii)$  existem constantes  $\delta, R, \alpha > 0$  tais que  $\|J'(u)\| \cdot \|u\| \geq \alpha$  para qualquer

$$u \in J^{-1}([c - \delta, c + \delta]) \text{ com } \|u\| \geq R.$$

### Observações:

1. As condições (i) e (ii) acima estão implícitas na conhecida condição de Palais-Smale no nível  $c \in \mathbb{R}$ ,  $(PS)_c$ , a saber

toda sequência  $(u_n) \subset X$  tal que  $J(u_n) \rightarrow c$  e  $J'(u_n) \rightarrow 0$  possui uma subsequência convergente.

2. No problema (1), a condição de crescimento subcrítico de  $f$  dá automaticamente  $(C)_c(i)$  para todo  $c \in \mathbb{R}$ , pois usando a Proposição A.2, obtemos uma subsequência

convergente, sempre que uma sequência limitada satisfaz  $J(u_n) \rightarrow c$  e  $J'(u_n) \rightarrow 0$ . Além disso, a condição de Cerami acima com  $c \in (0, +\infty)$  implica na Definição 1.1 com  $(c_1, c_2) = (0, +\infty)$ . De fato, considere uma sequência  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  limitada com  $(u_n) \subset J^{-1}(c_1, c_2)$  e  $J'(u_n) \rightarrow 0$ . Como  $(J(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada, tomemos  $(u_{n_k})$  tal que  $(J(u_{n_k}))$  seja convergente. Sendo  $(J(u_{n_k}))$  convergente, então  $J(u_{n_k}) \rightarrow c$  onde  $c \in [c_1, c_2]$ , então  $(u_{n_k})$  possui uma subsequência convergente.

Agora, vamos demonstrar dois lemas que serão utilizados na prova do teorema principal do capítulo, que será visto mais adiante. Recordemos a desigualdade de interpolação que será usada na demonstração do Lema 2.1:

$$\|u\|_q \leq \|u\|_\mu^t \|u\|_r^{1-t}, \quad u \in L^\mu(\Omega) \cap L^r(\Omega),$$

onde  $0 < \mu \leq q \leq r$  com  $q^{-1} = t\mu^{-1} + (1-t)r^{-1}$ ,  $t \in [0, 1]$ .

**Lema 2.1.** Se  $F$  satisfaz (2) e (3) com  $\mu > \frac{N}{2}(q-2)$  (ou  $\mu > q-2$  se  $N = 1, 2$ ) então  $J$  satisfaz  $(C)_c$  para todo  $c \in \mathbb{R}$ .

**Prova:** Suponhamos que,

$$\liminf_{|s| \rightarrow \infty} \frac{f(x, s)s - 2F(x, s)}{|s|^\mu} \geq a > 0 \text{ uniformemente para } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Então dado  $\epsilon > 0$  com  $a > \epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\frac{f(x, s)s - 2F(x, s)}{|s|^\mu} \geq a - \epsilon, \forall |s| \geq \delta \text{ e } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Logo,  $f(x, s)s - 2F(x, s) \geq (a - \epsilon)|s|^\mu$ ,  $\forall |s| \geq \delta$  e  $x \in \Omega$  q.t.p. Tomemos  $a_1 = a - \epsilon > 0$ . Assim,

$$f(x, s)s - 2F(x, s) \geq a_1|s|^\mu, \forall |s| \geq \delta \text{ e } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Por outro lado, para  $|s| \leq \delta$  e  $x \in \Omega$  q.t.p. temos que

$$|f(x, s)s - 2F(x, s) - a_1|s|^\mu| \leq |f(x, s)||s| + 2|F(x, s)| + a_1|s|^\mu,$$

usando a condição de crescimento subcrítico,

$$|f(x, s)||s| + 2|F(x, s)| + a_1|s|^\mu \leq (a_0|s|^{p-1} + b_0)|s| + 2\left(\frac{a_0}{p}|s|^p + b_0|s|\right) + a_1|s|^\mu$$

$$\leq a_0\delta^p + b_0\delta + 2\frac{a_0}{p}\delta^p + 2b_0\delta + a_1\delta^\mu = d_1$$

$$\Rightarrow |f(x, s)s - 2F(x, s) - a_1|s|^\mu| \leq d_1,$$

onde  $d_1$  é uma constante maior que zero. Logo

$$a_1|s|^\mu - d_1 \leq f(x, s)s - 2F(x, s), \quad \forall |s| \leq \delta \text{ e } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Como  $f(x, s)s - 2F(x, s) \geq a_1|s|^\mu$ ,  $\forall |s| \geq \delta$  e  $x \in \Omega$  q.t.p. temos que

$$f(x, s)s - 2F(x, s) \geq a_1|s|^\mu - d_1, \quad |s| \geq \delta \text{ e } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Portanto, existem constantes  $a_1 > 0$  e  $d_1 > 0$  tais que

$$a_1|s|^\mu - d_1 \leq f(x, s)s - 2F(x, s), \quad s \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \Omega \text{ q.t.p.} \quad (2.1)$$

Usaremos (2.1) para provar que  $J$  satisfaz as condições  $(C)_c(i)$  e  $(C)_c(ii)$ . Pela observação que fizemos no início do capítulo, a condição  $(C)_c(i)$  é satisfeita usando a Proposição A.2.

Agora, a fim de verificar  $(C)_c(ii)$ , suponhamos por contradição que existe  $c \in \mathbb{R}$  e uma sequência  $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$  tais que

$$J(u_n) \rightarrow c, \quad \|J'(u_n)\| \cdot \|u_n\| \rightarrow 0 \text{ e } \|u_n\| \rightarrow \infty \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Usando (2.1), obtemos

$$a_1\|u_n\|^\mu - d_1 \leq f(x, u_n)u_n - 2F(x, u_n),$$

o que implica

$$\int_{\Omega} (a_1\|u_n\|^\mu - d_1) dx \leq \int_{\Omega} [f(x, u_n)u_n - 2F(x, u_n)] dx,$$

Assim,

$$a_1 \int_{\Omega} \|u_n\|^\mu dx - \int_{\Omega} d_1 dx \leq \int_{\Omega} [f(x, u_n)u_n - 2F(x, u_n)] dx,$$

logo,

$$\begin{aligned} a_1\|u_n\|_\mu^\mu - d_1|\Omega| &\leq \int_{\Omega} [f(x, u_n)u_n - 2F(x, u_n)] dx \\ &= \int_{\Omega} f(x, u_n)u_n dx - \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - 2F(x, u_n) dx \\ &= 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \int_{\Omega} F(x, u_n) dx \right) - \int_{\Omega} [|\nabla u_n|^2 - f(x, u_n)u_n] dx \\ &= 2J(u_n) - J'(u_n)u_n, \end{aligned}$$

o que implica que

$$a_1 \|u_n\|_\mu^\mu - d_1 |\Omega| \leq 2J(u_n) - J'(u_n)u_n.$$

Como  $J(u_n) \rightarrow c$  e  $\|J'(u_n)\| \cdot \|u_n\| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , vemos que, as sequências  $(J(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(J'(u_n)u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  são limitadas, daí existe  $k > 0$  tal que

$$a_1 \|u_n\|_\mu^\mu - d_1 |\Omega| \leq k,$$

logo,  $\|u_n\|_\mu^\mu \leq k_1$ , com  $k_1 > 0$ . Assim,  $\|u_n\|_\mu \leq A$ , onde  $A > 0$ . Portanto

$$u_n \in L^\mu(\Omega) \text{ e } (\|u_n\|_\mu)_{n \in \mathbb{N}} \text{ é uma sequência limitada.}$$

Por outro lado, usando (2),

$$\limsup_{|s| \rightarrow \infty} \frac{F(x, s)}{|s|^q} \leq b < \infty \text{ uniformemente para } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Então, dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\frac{F(x, s)}{|s|^q} \leq b + \epsilon, \quad \forall |s| \geq \delta \text{ e } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Daí,  $F(x, s) \leq (b + \epsilon)|s|^q$ ,  $\forall |s| \geq \delta$  e  $x \in \Omega$  q.t.p. Tomando  $b_2 = b + \epsilon > 0$ , tem-se

$$F(x, s) \leq b_2 |s|^q, \quad \forall |s| \geq \delta \text{ e } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Para  $|s| \leq \delta$  e  $x \in \Omega$  q.t.p. temos que

$$|F(x, s) - b_2 |s|^q| \leq |F(x, s)| + b_2 |s|^q.$$

Usando a condição de crescimento subcrítico

$$|F(x, s)| + b_2 |s|^q \leq \frac{a_0}{p} |s|^p + b_0 |s| + b_2 |s|^q \leq \frac{a_0}{p} \delta^p + 2b_0 \delta + b_2 \delta^q = d_2$$

$$\Rightarrow |F(x, s) - b_2 |s|^q| \leq d_2.$$

Daí,

$$F(x, s) \leq b_2 |s|^q + d_2 \quad \forall |s| \leq \delta \text{ e } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Como  $F(x, s) \leq b_2 |s|^q$ ,  $\forall |s| \geq \delta$  e  $x \in \Omega$  q.t.p. temos que

$$F(x, s) \leq b_2 |s|^q + d_2, \quad |s| \geq \delta \text{ e } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Portanto, existem constantes  $b_2 > 0$  e  $d_2 > 0$  tais que

$$F(x, s) \leq b_2 |s|^q + d_2, \quad \forall s \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}||u_n||^2 - J(u_n) &= \frac{1}{2}||u_n||^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\Omega} F(x, u_n) dx \\
 &= \int_{\Omega} F(x, u_n) dx \leq \int_{\Omega} (b_2 ||u_n||^q + d_2) dx = b_2 ||u_n||_q^q + d_2 |\Omega| \\
 \Rightarrow \frac{1}{2}||u_n||^2 - J(u_n) &\leq b_2 ||u_n||_q^q + d_2 |\Omega|.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2}||u_n||^2 - J(u_n) \leq b_2 ||u_n||_q^q + d_2 |\Omega|. \quad (2.2)$$

Como estamos assumindo que  $\mu \leq q$ , tomando

$$r = 2N/(N-2) \text{ com } N \geq 3 \text{ (ou } q \leq r < \infty \text{ se } N = 1, 2)$$

e usando a desigualdade de interpolação, vamos estimar (2.2). De (2.2) temos que

$$\frac{1}{2}||u_n||^2 - J(u_n) \leq b_2 ||u_n||_q^q + d_2 |\Omega| \Rightarrow \frac{1}{2}||u_n||^2 \leq b_2 ||u_n||_{\mu}^{tq} ||u_n||_r^{(1-t)q} + d_2 |\Omega| + J(u_n).$$

Como  $(J(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  é convergente, logo é limitada e usando a desigualdade de Sobolev e o fato que  $(||u_n||_{\mu})$  é limitada, obtemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}||u_n||^2 &\leq b_2 ||u_n||_{\mu}^{tq} ||u_n||_r^{(1-t)q} + d_2 |\Omega| + ||J(u_n)|| \\
 &\leq b_2 A^{tq} k^{(1-t)q} ||u_n||^{(1-t)q} + d_2 |\Omega| + k_1 \\
 \Rightarrow \frac{1}{2}||u_n||^2 &\leq B ||u_n||^{(1-t)q} + C, \\
 \Rightarrow \frac{1}{2}||u_n||^2 &\leq \frac{1}{2}||u_n||^2 \leq B ||u_n||^{(1-t)q} + C,
 \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde  $B = b_2 A^{tq} k^{(1-t)q}$  e  $C = d_2 |\Omega| + k_1$  são constantes. Finalmente, uma vez que estamos tomando  $\mu > N(q-2)/2$  no caso  $N \geq 3$ , segue que

$$q(1-t) < 2.$$

De fato, suponhamos que  $q(1-t) \geq 2$ , então  $q-2 \geq qt$ . Sendo  $\mu > N(q-2)/2$ , obtemos  $\mu > (Nqt)/2$ , como  $\mu \leq q$ , segue que

$$\mu > (Nqt)/2 \geq (N\mu t)/2 \Rightarrow 1 > (Nt)/2 \Rightarrow 2 > Nt.$$



Sendo  $t \in [0, 1]$ , tomemos  $t = 1$ , assim  $2 > N$ , absurdo. Logo,  $q(1 - t) < 2$ .

Daí,

$$\frac{1}{2} \|u_n\|^2 \leq B \|u_n\|^{(1-t)q} + C < B \|u_n\|^2 + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \|u_n\|^2 < B \|u_n\|^2 + C.$$

Portanto,  $(\|u_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada, o que é um absurdo, pois  $\|u_n\| \rightarrow +\infty$ .

Nos casos  $N = 1, 2$  a condição  $q(1 - t) < 2$  é equivalente a  $\mu > r(q - 2)/(r - 2)$ , onde  $q \leq r < +\infty$ . De fato, suponhamos que  $q(1 - t) < 2$ , como  $q^{-1} = t\mu^{-1} + (1 - t)r^{-1}$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ , segue que, multiplicando  $q$  a ambos os membros da última igualdade

$$1 = qt\mu^{-1} + qr^{-1} - qtr^{-1} \text{ o que implica } 1 = qt(\mu^{-1} - r^{-1}) + qr^{-1},$$

notemos que,  $q(1 - t) < 2$  dessa última desigualdade obtemos  $q - 2 < qt$ , daí

$$(q - 2)(\mu^{-1} - r^{-1}) + qr^{-1} < qt(\mu^{-1} - r^{-1}) + qr^{-1} = 1$$

$$\Rightarrow (q - 2)(\mu^{-1} - r^{-1}) + qr^{-1} < 1$$

$$\Rightarrow q\mu^{-1} - qr^{-1} - 2\mu^{-1} + 2r^{-1} + qr^{-1} < 1$$

$$\Rightarrow \mu^{-1}(q - 2) + 2r^{-1} < 1.$$

Como  $\mu > 0$ , segue que

$$q - 2 + 2\mu r^{-1} < \mu$$

$$\Rightarrow q - 2 < \left(1 - \frac{2}{r}\right) \mu \Rightarrow \frac{q - 2}{(r - 2)/r} < \mu$$

$$\Rightarrow \mu > r(q - 2)/(r - 2).$$

Se,  $\mu > r(q - 2)/(r - 2)$ . Sendo

$$q^{-1} = t\mu^{-1} - (1 - t)r^{-1}, \forall t \in [0, 1]$$

então,  $t = [q^{-1} + (1-t)r^{-1}]\mu$ , sendo  $\mu > r(q-2)/(r-2)$ , segue que

$$\begin{aligned} t &= [q^{-1} + (1-t)r^{-1}]\mu > [q^{-1} + (1-t)r^{-1}][r(q-2)/(r-2)] \\ \Rightarrow tq &> \frac{r(q-2)}{r-2} - q(1-t)\frac{q-2}{r-2} = (q-2) \left( \frac{r}{r-2} - \frac{q(1-t)}{r-2} \right) \\ \Rightarrow tq &> (q-2) \left( \frac{r}{r-2} - \frac{q(1-t)}{r-2} \right). \end{aligned}$$

Observemos que,  $\frac{r}{r-2} - \frac{q(1-t)}{r-2} > 0$ , com  $r > 2$ , caso contrário,  $\frac{r}{r-2} < \frac{q(1-t)}{r-2}$ , sendo  $q \leq r$ , segue que

$$\frac{r}{r-2} < \frac{q(1-t)}{r-2} \Rightarrow r < q(1-t) \Rightarrow t < 0, \text{ o que é um absurdo.}$$

Logo,

$$tq > (q-2) \left( \frac{r}{r-2} - \frac{q(1-t)}{r-2} \right) \geq q-2 \Rightarrow tq > q-2.$$

Como  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r}{r-2} = 1$  e sendo  $\mu > q-2$ , temos que  $q(1-t) < 2$ . Com efeito, suponhamos que

$$q(1-t) \geq 2,$$

usando o fato de  $\mu > q-2$ , obtemos

$$\mu > q-2 \geq qt \Rightarrow \mu > qt,$$

tomando  $t = 1$ , temos  $\mu > q$ , absurdo, pois  $\mu \leq q$ . Assim,  $q(1-t) < 2$ .

Usando novamente a expressão (2.3), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}||u_n||^2 &\leq B||u_n||^{(1-t)q} + C < B||u_n||^2 + C \\ \Rightarrow \frac{1}{2}||u_n||^2 &< B||u_n||^2 + C. \end{aligned}$$

Concluimos que,  $(||u_n||)_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada, o que é um absurdo, pois  $||u_n|| \rightarrow +\infty$ . ■

Nosso próximo resultado, que será utilizado também na demonstração do Teorema 2.2, mostra que a situação subquadrático mesmo enfraquecida por (7) ou (8) garante que vale  $(C)_c \forall c \in \mathbb{R}$ . Além disso, a condição (7) ou (8) nos permite obter problemas de ressonância e duplamente ressonantes, sem a necessidade de ter uma limitação no quociente  $f(x, s)/s$ .

**Lema 2.2.** Se  $F$  satisfaz (6) e ((7) ou (8)) então  $J$  satisfaz  $(C)_c$ ,  $\forall c \in \mathbb{R}$ .

**Prova:** Suponhamos que  $F$  satisfaz (6) e (7) e por negação que  $J$  não satisfaz  $(C)_c(ii)$  para algum  $c \in \mathbb{R}$ . Então, existe uma sequência  $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$  tal que

$$J(u_n) \rightarrow c, \|J'(u_n)\| \cdot \|u_n\| \rightarrow 0 \text{ e } \|u_n\| \rightarrow +\infty \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

Observemos que

$$\int_{\Omega} [f(x, u_n)u_n - 2F(x, u_n)]dx = 2J(u_n) - J'(u_n)u_n.$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [f(x, u_n)u_n - 2F(x, u_n)]dx = \lim_{n \rightarrow \infty} [2J(u_n) - J'(u_n)u_n] = 2c. \quad (2.4)$$

Vamos mostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [f(x, u_n)u_n - 2F(x, u_n)]dx = +\infty$  chegando num absurdo. Afim de verificar este fato, faremos a seguinte afirmação.

**Afirmação 2.1.** Existe  $\Omega_0 \subset \Omega$  com  $|\Omega_0| > 0$  tal que  $|u_n(x)| \rightarrow +\infty, x \in \Omega_0$  q.t.p.

Usando a afirmação anterior e a condição (7), temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x, u_n(x))u_n(x) - 2F(x, u_n(x))] = +\infty \text{ com } x \in \Omega_0 \text{ q.t.p.}$$

Além disso, como  $\lim_{|s| \rightarrow +\infty} [f(x, s)s - 2F(x, s)] = +\infty$ , então dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$f(x, s)s - 2F(x, s) > \epsilon, \forall |s| \geq \delta.$$

Por outro lado, para  $|s| \leq \delta$ , temos que

$$\begin{aligned} |f(x, s)s - 2F(x, s)| &\leq |f(x, s)||s| + 2|F(x, s)| \leq (a_0|s|^{p-1} + b_0)|s| + 2\left(\frac{a_0}{p}|s|^p + b_0|s|\right) \\ &\leq M, \text{ onde } M > 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$f(x, s)s - 2F(x, s) \geq -M, \forall |s| \leq \delta.$$

Sendo,  $f(x, s)s - 2F(x, s) > \epsilon, \forall |s| \geq \delta$ , obtemos

$$f(x, s)s - 2F(x, s) > \epsilon > -M, \forall |s| \geq \delta.$$

Dessa forma,

$$f(x, s)s - 2F(x, s) \geq -M, \forall s \in \mathbb{R}, x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Daí,

$$f(x, u_n)u_n - 2F(x, u_n) \geq -M, \quad x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Tomemos  $Q_n = f(x, u_n)u_n - 2F(x, u_n)$ . Uma vez que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = +\infty$ , então existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $Q_n > 0$ ,  $\forall n \geq n_0$ . Observemos que

$$\int_{\Omega} Q_n dx = \int_{\Omega} [f(x, u_n)u_n - 2F(x, u_n)] dx = 2J(u_n) - J'(u_n)u_n,$$

como  $(J(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(J'(u_n)u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  são sequências limitadas, então

$$\int_{\Omega} Q_n dx < \infty.$$

Logo,  $(Q_n)$  é uma sequência de funções em  $L^1(\Omega)$ . Além disso,  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} Q_n < \infty$ . Portanto, vamos utilizar o Lema de Fatou's na sequência  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Notemos que

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} Q_n dx &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_{\Omega_0} Q_n dx + \int_{\Omega \setminus \Omega_0} Q_n dx \right) \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_0} Q_n dx + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega \setminus \Omega_0} Q_n dx \end{aligned}$$

e sendo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(x, u_n(x))u_n(x) - 2F(x, u_n(x))] = +\infty \text{ com } x \in \Omega_0 \text{ q.t.p.}$$

e

$$f(x, u_n(x))u_n(x) - 2F(x, u_n(x)) \geq -M \text{ com } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} Q_n dx &\geq \int_{\Omega_0} \left( \liminf_{n \rightarrow +\infty} Q_n \right) dx + \int_{\Omega \setminus \Omega_0} \left( \liminf_{n \rightarrow +\infty} Q_n \right) dx \\ &\geq \int_{\Omega_0} \left( \liminf_{n \rightarrow +\infty} Q_n \right) dx + \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (-M) dx \\ &= \int_{\Omega_0} \left( \liminf_{n \rightarrow +\infty} Q_n \right) dx - M|\Omega \setminus \Omega_0| = +\infty, \end{aligned}$$

o que contradiz a expressão (2.4). Resta provar a Afirmação 2.1.

Usando (6),  $\limsup_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{2F(x, s)}{s^2} \leq \lambda_{j+1}$ , uniformemente para  $x \in \Omega$  q.t.p., existe  $n_0 \in \mathbb{N}$

tal que

$$\frac{2F(x, u_n)}{u_n^2} \leq \lambda_{j+1}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Logo,

$$F(x, u_n) \leq \frac{\lambda_{j+1}}{2} u_n^2 \Rightarrow F(x, u_n) - \frac{\lambda_{j+1}}{2} u_n^2 \leq 0.$$

Integrando ambos os membros da última desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ F(x, u_n) - \frac{\lambda_{j+1}}{2} u_n^2 \right] dx &\leq 0 \Rightarrow \frac{1}{\|u_n\|^2} \int_{\Omega} \left[ F(x, u_n) - \frac{\lambda_{j+1}}{2} u_n^2 \right] dx \leq 0 \\ \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\|u_n\|^2} \int_{\Omega} \left[ F(x, u_n) - \frac{\lambda_{j+1}}{2} u_n^2 \right] dx &\leq 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Tomemos uma sequência  $\hat{u}_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$ , sendo  $(\hat{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  limitada. Então, para algum  $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$ , temos que

$$\hat{u}_n \rightharpoonup \hat{u} \text{ em } H_0^1(\Omega), \text{ assim, } \hat{u}_n \rightarrow \hat{u} \text{ em } L^2(\Omega) \text{ com } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Notemos que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|u_n\|^2} J(u_n) &= \frac{1}{\|u_n\|^2} \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \int_{\Omega} F(x, u_n) dx \right) \\ &= \frac{1}{2\|u_n\|^2} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \frac{1}{\|u_n\|^2} \int_{\Omega} F(x, u_n) dx \\ &= \frac{1}{2\|u_n\|^2} \|u_n\|^2 - \frac{1}{\|u_n\|^2} \int_{\Omega} F(x, u_n) dx \\ \Rightarrow \frac{1}{\|u_n\|^2} J(u_n) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\|u_n\|^2} \int_{\Omega} F(x, u_n) dx. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda_{j+1} \|\hat{u}_n\|_2^2 &= \frac{1}{2} \lambda_{j+1} \left\| \frac{u_n}{\|u_n\|} \right\|_2^2 = \frac{1}{2} \lambda_{j+1} \int_{\Omega} \left| \frac{u_n}{\|u_n\|} \right|^2 dx \\ &= \frac{1}{\|u_n\|^2} \frac{\lambda_{j+1}}{2} \int_{\Omega} |u_n|^2 dx = \frac{1}{\|u_n\|^2} \int_{\Omega} \frac{\lambda_{j+1}}{2} u_n^2 dx. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\frac{1}{2} \lambda_{j+1} \|\hat{u}_n\|_2^2 = \frac{1}{\|u_n\|^2} \int_{\Omega} \frac{\lambda_{j+1}}{2} u_n^2 dx.$$

Vamos utilizar a igualdade acima na expressão (2.6).

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{||u_n||^2} J(u_n) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{||u_n||^2} \int_{\Omega} F(x, u_n) dx \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lambda_{j+1} ||\hat{u}_n||_2^2 - \frac{1}{||u_n||^2} \int_{\Omega} F(x, u_n) dx + \frac{1}{||u_n||^2} \int_{\Omega} \frac{\lambda_{j+1}}{2} u_n^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} (1 - \lambda_{j+1} ||\hat{u}_n||_2^2) - \frac{1}{||u_n||^2} \int_{\Omega} \left[ F(x, u_n) - \frac{\lambda_{j+1}}{2} u_n^2 \right] dx \\
 \Rightarrow \frac{1}{||u_n||^2} J(u_n) &= \frac{1}{2} (1 - \lambda_{j+1} ||\hat{u}_n||_2^2) - \frac{1}{||u_n||^2} \int_{\Omega} \left[ F(x, u_n) - \frac{\lambda_{j+1}}{2} u_n^2 \right] dx.
 \end{aligned}$$

Fazendo  $n \rightarrow +\infty$  na igualdade acima, desde que  $J(u_n) \rightarrow c$  então  $(J(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada, e como  $||u_n|| \rightarrow +\infty$ , obtemos

$$\frac{1}{||u_n||^2} J(u_n) \rightarrow 0.$$

$$\text{Assim, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} (1 - \lambda_{j+1} ||\hat{u}_n||_2^2) - \frac{1}{||u_n||^2} \int_{\Omega} \left[ F(x, u_n) - \frac{\lambda_{j+1}}{2} u_n^2 \right] dx \right) = 0.$$

Como  $\hat{u}_n \rightarrow \hat{u}$  em  $L^2(\Omega)$  e usando a expressão (2.5), temos que

$$\frac{1}{2} (1 - \lambda_{j+1} ||\hat{u}||_2^2) \leq 0.$$

$$\text{Daí, } 1 - \lambda_{j+1} ||\hat{u}||_2^2 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq \lambda_{j+1} ||\hat{u}||_2^2 \Rightarrow ||\hat{u}||_2^2 \neq 0 \Rightarrow \hat{u} \neq 0.$$

Como  $\hat{u}_n \rightarrow \hat{u}$  com  $\hat{u} \neq 0$ , tomemos  $\Omega_0 = \{x \in \Omega; \hat{u}(x) \neq 0\}$ .

$$\hat{u}_n \rightarrow \hat{u} \text{ em } \Omega \text{ q.t.p. e } \hat{u}_n \rightarrow \hat{u} \text{ em } \Omega_0 \text{ q.t.p.}$$

Daí,  $\hat{u}_n \rightarrow \hat{u}$  em todo ponto de  $\Omega_0 \setminus A$  e  $\hat{u} \neq 0$  em  $\Omega_0 \setminus B$ .

Seja  $x_0 \in \Omega_0 \setminus (A \cup B)$ , temos que

$$\hat{u}(x_0) \neq 0 \text{ e } \hat{u}_n(x_0) \rightarrow \hat{u}(x_0),$$

assim,  $\hat{u}_n(x_0) = \frac{u_n(x_0)}{||u_n||} \rightarrow \hat{u}(x_0)$ , sendo  $||u_n|| \rightarrow +\infty$ , obtemos  $u_n(x_0) \rightarrow \pm\infty$ , ou seja,  $|u_n(x_0)| \rightarrow +\infty$ . ■

Antes de demonstrarmos o Teorema 2.1, vamos mostrar que a condição (4) implica na geometria do Teorema do Passo da Montanha [1] para o funcional  $J$  e usar este fato na prova do Teorema 2.1

**Lema 2.3.** Se  $F$  satisfaz (4) então existem  $\rho, \beta > 0$  tais que  $J(u) \geq \beta$  se  $||u|| = \rho$ . Além disso, existe  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$  tal que  $J(tu_0) \rightarrow -\infty$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .

**Prova:** Primeiramente vamos mostrar que,

$$\frac{1}{2}(\beta - \epsilon)s^2 - B \leq F(x, s) \leq \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon)s^2 + A|s|^p, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Usaremos o crescimento subcrítico de  $f$  na prova. Observemos que esta condição com a hipótese  $0 < \beta \leq \liminf_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{2F(x, s)}{s^2}$  só é possível quando  $p > 2$ . De fato, suponhamos que  $p \leq 2$ . Sendo  $|F(x, s)| \leq a_1|s|^p + b_1$ , temos que,

$$\frac{2F(x, s)}{s^2} \leq a_2 \frac{|s|^p}{|s|^2} + \frac{b_2}{|s|^2},$$

fazendo  $|s| \rightarrow +\infty$  na ultima desigualdade, obtemos

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{2F(x, s)}{s^2} \leq 0.$$

Absurdo, pois por hipótese  $0 < \liminf_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{2F(x, s)}{s^2}$ . Assim, vamos assumir que  $p > 2$ .

Por (4),

$$0 < \beta \leq \liminf_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{2F(x, s)}{s^2} \text{ uniformemente para } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Temos que, dado  $\epsilon > 0$  com  $\epsilon < \beta$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\beta - \epsilon \leq \frac{2F(x, s)}{s^2}, \quad \forall |s| \geq \delta.$$

Assim,

$$\frac{1}{2}(\beta - \epsilon)s^2 \leq F(x, s), \quad \forall |s| \geq \delta.$$

Por outro lado, para  $|s| \leq \delta$  e  $x \in \Omega$  temos que,

$$\left| F(x, s) - \frac{1}{2}(\beta - \epsilon)s^2 \right| \leq |F(x, s)| + \frac{1}{2}(\beta - \epsilon)|s|^2 \leq a_1|s|^p + b_1|s| + \frac{1}{2}(\beta - \epsilon)|s|^2 \leq B,$$

onde  $B > 0$ . Logo

$$\left| F(x, s) - \frac{1}{2}(\beta - \epsilon)s^2 \right| \leq B, \quad \forall |s| \leq \delta.$$

Daí,

$$\frac{1}{2}(\beta - \epsilon)s^2 - B \leq F(x, s), \quad \forall |s| \leq \delta. \tag{2.7}$$

Sendo,  $F(x, s) \geq \frac{1}{2}(\beta - \epsilon)s^2$ ,  $\forall |s| \geq \delta$ , obtemos que

$$F(x, s) \geq \frac{1}{2}(\beta - \epsilon)s^2 \geq \frac{1}{2}(\beta - \epsilon)s^2 - B, \quad \forall |s| \geq \delta.$$

Logo,

$$F(x, s) \geq \frac{1}{2}(\beta - \epsilon)s^2 - B, \quad \forall |s| \geq \delta. \quad (2.8)$$

De (2.7) e (2.8) temos que

$$\frac{1}{2}(\beta - \epsilon)s^2 - B \leq F(x, s), \quad \forall s \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Agora vamos mostrar que

$$F(x, s) \leq \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon)s^2 + A|s|^p, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Para isso utilizaremos a desigualdade,

$$\limsup_{s \rightarrow 0} \frac{2F(x, s)}{s^2} \leq \alpha \text{ uniformemente para } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Temos que, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\left| \frac{2F(x, s)}{s^2} \right| \leq \alpha + \epsilon, \quad \forall |s| \leq \delta.$$

Logo,

$$F(x, s) \leq \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon)s^2, \quad \forall |s| \leq \delta. \quad (2.9)$$

Para  $|s| \geq \delta$  e  $x \in \Omega$ , temos

$$\begin{aligned} F(x, s) &\leq a_1|s|^p + b_1 \leq \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon)s^2 + a_1|s|^p + b_1 \\ &\leq \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon)s^2 + \frac{b_1}{\delta^p}\delta^p + a_1|s|^p \leq \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon)s^2 + A|s|^p. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$F(x, s) \leq \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon)s^2 + A|s|^p, \quad \forall |s| \geq \delta \quad (2.10)$$

Por (2.9) e (2.10), obtemos

$$F(x, s) \leq \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon)s^2 + A|s|^p, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}(\beta - \epsilon)s^2 - B \leq F(x, s) \leq \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon)s^2 + A|s|^p, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega \text{ q.t.p.} \quad (2.11)$$



Tomemos  $\epsilon > 0$  tal que  $\alpha + \epsilon < \lambda_1$ . Sabemos que

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx.$$

Usando a segunda desigualdade da expressão (2.11), temos que

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon)u^2 + A|u|^p \right] \\ &= \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon) \int_{\Omega} u^2 dx - A \int_{\Omega} |u|^p dx \\ &= \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon) \|u\|_2^2 - A \|u\|_p^p. \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Poincaré com  $\lambda_1 \|u\|_2^2 \leq \|u\|^2$  e a desigualdade de Sobolev com  $\|u\|_p^p \leq K \|u\|^p$ , obtemos

$$J(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon) \frac{\|u\|^2}{\lambda_1} - AK \|u\|^p = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\alpha + \epsilon}{\lambda_1} \right) \|u\|^2 - AK \|u\|^p.$$

Assim,

$$J(u) \geq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\alpha + \epsilon}{\lambda_1} \right) \|u\|^2 - AK \|u\|^p. \quad (2.12)$$

Para toda  $\|u\| = \rho$  com  $\rho = \left( \frac{1 - \frac{\alpha + \epsilon}{\lambda_1}}{4AK} \right)^{\frac{1}{p-2}}$ , obtemos a seguinte estimativa para a expressão (1.12),

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\alpha + \epsilon}{\lambda_1} \right) \|u\|^2 - AK \|u\|^p = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\alpha + \epsilon}{\lambda_1} \right) \rho^2 - AK \rho^p \\ &= \rho^2 \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\alpha + \epsilon}{\lambda_1} \right) - AK \rho^{p-2} \right] = \rho^2 \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\alpha + \epsilon}{\lambda_1} \right) - AK \left( \frac{1 - \frac{\alpha + \epsilon}{\lambda_1}}{4AK} \right) \right] \\ &= \rho^2 \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\alpha + \epsilon}{\lambda_1} \right) - \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\alpha + \epsilon}{\lambda_1} \right) \right] = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\alpha + \epsilon}{\lambda_1} \right) \rho^2. \end{aligned}$$

Sendo  $\alpha + \epsilon < \lambda_1$ , obtemos  $1 - \frac{\alpha + \epsilon}{\lambda_1} > 0$  e  $\rho > 0$ , temos que

$$J(u) \geq \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\alpha + \epsilon}{\lambda_1} \right) \rho^2 \equiv \beta > 0, \quad \forall \|u\| = \rho.$$

Por outro lado, tomemos  $\epsilon > 0$  tal que  $\beta - \epsilon > \lambda_1$ . Usando a primeira desigualdade da expressão (2.11), obtemos

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} (\beta - \epsilon) u^2 - B \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{2} (\beta - \epsilon) \int_{\Omega} u^2 dx + B \int_{\Omega} dx = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{\beta - \epsilon}{2} \|u\|_2^2 + B|\Omega| \\ \Rightarrow J(u) &\leq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{\beta - \epsilon}{2} \|u\|_2^2 + B|\Omega|. \end{aligned}$$

Seja  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$  uma autofunção associada ao autovalor  $\lambda_1$  tal que

$$\|u_0\|^2 = \lambda_1 \|u_0\|_2^2 = 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} J(tu_0) &\leq \frac{1}{2} \|tu_0\|^2 - \frac{\beta - \epsilon}{2} \|tu_0\|_2^2 + B|\Omega| = \frac{1}{2} \|u_0\|^2 t^2 - \frac{\beta - \epsilon}{2} \|u_0\|_2^2 t^2 + B|\Omega| \\ &= \frac{1}{2} t^2 - \frac{\beta - \epsilon}{2} \frac{\|u_0\|_2^2}{\lambda_1} t^2 + B|\Omega| = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\beta - \epsilon}{\lambda_1} \right) t^2 + B|\Omega| \\ \Rightarrow J(tu_0) &\leq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\beta - \epsilon}{\lambda_1} \right) t^2 + B|\Omega|. \end{aligned}$$

Como  $\beta - \epsilon > \lambda_1$ , obtemos  $1 - \frac{\beta - \epsilon}{\lambda_1} < 0$ , assim

$$J(tu_0) \leq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\beta - \epsilon}{\lambda_1} \right) t^2 + B|\Omega| \rightarrow -\infty \text{ quando } t \rightarrow +\infty.$$

■

Provaremos nosso resultado principal. Notemos que a condição (4) implica na Geometria do Teorema do Passo da Montanha, além disso, o Teorema 1.2 é usado na demonstração abaixo juntamente com a condição de Cerami, condição que é garantida pelo Lema 2.1

**Teorema 2.1.** Se  $F$  satisfaz (2), (3) e (4) com  $\mu > \frac{N}{2}(q-2)$ , então o problema (1) tem solução não-trivial  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

**Prova:** Observemos que o funcional  $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$  e  $H_0^1(\Omega)$  é um espaço de Hilbert. Além disso, pelo lema 2.1,  $J$  satisfaz a condição  $(C)_c \forall c > 0$ .

## 2. Problemas elípticos não quadráticos no infinito

---

Tomemos  $S = \{u \in H_0^1(\Omega) : \|u\| = \rho\}$ , notemos que  $S$  é um subconjunto fechado de  $H_0^1(\Omega)$ , pois tomando uma sequência  $(u_n) \subset S$  tal que  $u_n \rightarrow u$ ,  $\|u_n\| = \rho$ , fazendo  $n \rightarrow +\infty$ , obtemos

$$\|u\| = \rho \Rightarrow u \in S.$$

Consideremos  $Q = \{tu_0 : 0 \leq t \leq t_0\} \subset H_0^1(\Omega)$  onde  $\partial Q = \{0, t_0u_0\}$  é limitada com  $t_0 > 0$ . Verificaremos as seguintes condições:

1.  $\sup_{u \in \partial Q} J(u) \leq \alpha < \beta \leq \inf_{u \in S} J(u)$  para  $0 \leq \alpha < \beta$ ;
2.  $S$  e  $\partial Q$  estão linkados;
3.  $\sup_{u \in Q} J(u) < +\infty$ .

De fato, verificaremos a primeira condição, pelo lema 3.3,  $J(u) \geq \beta$ ,  $\forall u \in S$ , assim  $\beta \leq \inf_{u \in S} J(u)$ , além disso,  $J(u) \leq \alpha$ ,  $\forall u \in \partial Q$ . Logo,

$$\sup_{u \in \partial Q} J(u) \leq \alpha < \beta \leq \inf_{u \in S} J(u) \text{ para } 0 \leq \alpha < \beta.$$

Para obtermos a segunda condição vamos mostrar que  $S$  e  $\partial Q$  estão linkados, ou seja, vamos provar que:

- (i)  $\partial Q \cap S = \emptyset$ ;
- (ii) Se  $\phi : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  é uma aplicação contínua com  $\phi(u) = u$  para todo  $u \in \partial Q$  então  $\phi(Q) \cap S \neq \emptyset$ .

Observemos que  $\partial Q \cap S = \emptyset$ , pois tomando  $u \in \partial Q \cap S \Rightarrow u = 0$  ou  $u = t_0u_0$ , se  $u = 0$  e sabemos que  $\|u\| = \rho$ , obtemos  $\rho = 0$ , absurdo, pois  $\rho > 0$ .

Sejam  $\phi : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  uma aplicação contínua tal que  $\phi(u) = u$ ,  $\forall u \in \partial Q$ , ou seja,  $\phi(0) = 0$  e  $\phi(t_0u_0) = t_0u_0$  e definamos

$$\gamma : [0, t_0] \rightarrow H_0^1(\Omega), \quad \gamma(t) = tu_0.$$

Assim, definindo a função  $F = \|\phi \circ \gamma\| : [0, t_0] \rightarrow \mathbb{R}$ , notemos que  $F$  é contínua em  $[0, t_0]$ , pois  $\phi$ ,  $\gamma$  e  $\|\cdot\|$  são contínuas.

Além disso,

$$F(0) = \|\phi \circ \gamma(0)\| = \|\phi(\gamma(0))\| = \|\phi(0)\| = \|0\| = 0 \text{ e}$$

$$F(t_0) = \|\phi \circ \gamma(t_0)\| = \|\phi(\gamma(t_0))\| = \|\phi(t_0u_0)\| = \|t_0u_0\| > \rho, \text{ isto é,}$$

$$F(0) = 0 \text{ e } F(t_0) > \rho.$$

Logo,  $F(0) < \rho < F(t_0)$ , pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $\tilde{t} \in (0, t_0)$  tal que

$$F(\tilde{t}) = \rho.$$

Assim,

$$F(\tilde{t}) = \|\phi \circ \gamma(\tilde{t})\| = \rho \Rightarrow \phi \circ \gamma(\tilde{t}) \in S \text{ com } \gamma(\tilde{t}) \in Q.$$

Portanto,  $\phi(Q) \cap S \neq \emptyset$ . Finalmente, vamos verificar a terceira condição, como  $J(u) \leq \alpha$ ,  $\forall u \in Q$ , então  $\sup_{u \in Q} J(u) < +\infty$ .

Pelo Teorema 1.2 o funcional  $J$  possui valor crítico  $c \geq \beta$ . ■

Vamos observar o comportamento da função  $F$  que satisfaz (6) e ((7) ou (8)).

**Lema 2.4.** Se  $F$  satisfaz (6), então:

1.  $F(x, s) - \frac{1}{2}K(x)s^2 \rightarrow -\infty$  quando  $|s| \rightarrow +\infty$  se  $F$  satisfaz (7);
2.  $F(x, s) - \frac{1}{2}L(x)s^2 \rightarrow +\infty$  quando  $|s| \rightarrow +\infty$  se  $F$  satisfaz (8).

**Prova:** 1. Sejam  $g(x, s) = f(x, s) - K(x)s$  e  $G(x, s) = F(x, s) - \frac{1}{2}K(x)s^2$ .

Por (7),

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} [f(x, s)s - 2F(x, s)] = +\infty.$$

Dado  $M > 0$  existe  $s_M > 0$  tal que

$$f(x, s)s - 2F(x, s) \geq M, \forall |s| \geq s_M, x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} f(x, s)s - 2F(x, s) &= f(x, s)s - K(x)s^2 - 2F(x, s) + K(x)s^2 \\ &= [f(x, s) - K(x)s]s - 2 \left[ F(x, s) - \frac{1}{2}K(x)s^2 \right] \\ &= g(x, s)s - 2G(x, s) \\ &\Rightarrow f(x, s)s - 2F(x, s) = g(x, s)s - 2G(x, s). \end{aligned}$$

Logo,

$$g(x, s)s - 2G(x, s) \geq M, \forall |s| \geq s_M, x \in \Omega \text{ q.t.p.} \quad (2.13)$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds} \left[ \frac{G(x, s)}{s^2} \right] &= \frac{s^2 \frac{d}{ds} G(x, s) - (s^2)' G(x, s)}{s^4} \\
 &= \frac{s^2 \frac{d}{ds} [F(x, s) - (1/2)K(x)s^2] - 2sG(x, s)}{s^4} \\
 &= \frac{s^2[f(x, s) - K(x)s] - 2sG(x, s)}{s^4} = \frac{g(x, s)s - 2G(x, s)}{s^3} \\
 \Rightarrow \frac{d}{ds} \left[ \frac{G(x, s)}{s^2} \right] &= \frac{g(x, s)s - 2G(x, s)}{s^3}.
 \end{aligned}$$

Integrando a expressão acima ao longo do intervalo  $[t, T] \subset [s_M, +\infty]$  e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\frac{G(x, T)}{T^2} - \frac{G(x, t)}{t^2} = \int_t^T \frac{g(x, s)s - 2G(x, s)}{s^3} ds,$$

utilizando a expressão (2.13), temos que

$$\begin{aligned}
 \frac{G(x, T)}{T^2} - \frac{G(x, t)}{t^2} &= \int_t^T \frac{g(x, s)s - 2G(x, s)}{s^3} ds \geq \int_t^T \frac{M}{s^3} ds = -\frac{M}{2} \left( \frac{1}{T^2} - \frac{1}{t^2} \right) \\
 \Rightarrow \frac{G(x, T)}{T^2} - \frac{G(x, t)}{t^2} &\geq -\frac{M}{2} \left( \frac{1}{T^2} - \frac{1}{t^2} \right).
 \end{aligned}$$

Pela hipótese,

$$\limsup_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{2F(x, s)}{s^2} = K(x), \text{ obtemos que}$$

$$\begin{aligned}
 \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{G(x, T)}{T^2} &= \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{F(x, T) - (1/2)K(x)T^2}{T^2} = \limsup_{T \rightarrow +\infty} \left( \frac{F(x, T)}{T^2} - \frac{1}{2}K(x) \right) \\
 &\leq \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{F(x, T)}{T^2} - \frac{1}{2} \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{2F(x, T)}{T^2} = 0 \\
 \Rightarrow \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{G(x, T)}{T^2} &\leq 0.
 \end{aligned}$$

Como  $-\frac{M}{2} \left( \frac{1}{T^2} - \frac{1}{t^2} \right) \leq \frac{G(x, T)}{T^2} - \frac{G(x, t)}{t^2}$  e usando  $\limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{G(x, T)}{T^2} \leq 0$ , temos que

$$-\frac{M}{2} \left( -\frac{1}{t^2} \right) \leq -\frac{G(x,t)}{t^2} \Rightarrow G(x,t) \leq -\frac{M}{2}, \quad \forall t \geq s_M, \quad x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

De maneira análoga, mostramos que  $G(x,t) \leq -\frac{M}{2}$ ,  $\forall t \leq -s_M$ ,  $x \in \Omega$  q.t.p. Como  $M > 0$  é arbitrário, concluímos que, se  $F$  satisfaz (6) e (7), então

$$F(x, s) - \frac{1}{2}K(x)s^2 \rightarrow -\infty \text{ quando } |s| \rightarrow +\infty.$$

De maneira análoga, prova-se que

$$F(x, s) - \frac{1}{2}L(x)s^2 \rightarrow +\infty \text{ quando } |s| \rightarrow +\infty \text{ se } F \text{ satisfaz (8).}$$

■

Vamos utilizar o lema anterior para mostrar que as hipóteses do Teorema 2.2 (visto adiante) implicam na geometria do Teorema do Ponto de Sela [14] para o funcional  $J$ .

Considere a decomposição,

$$H_0^1(\Omega) = V \oplus W,$$

onde  $V$  é o subespaço gerado pelas autofunções correspondentes aos autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_j$  e  $W = V^\perp$ . Para simplificar, vamos escrever  $\lambda_j \leq L(x)$  para indicar que  $\lambda_j \leq L(x)$  é escrita com a desigualdade estrita em um conjunto de medida positiva. Com esta notação, a proposição 2 em [6] (ver também [11]) afirma que:

1. se  $\lambda_j \leq L(x)$  então existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$\|v\|^2 - \int_{\Omega} L(x)v^2 dx \leq -\delta_1 \|v\|^2, \quad \forall v \in V; \quad (2.14)$$

2. se  $K(x) \leq \lambda_{j+1}$  então existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$\|w\|^2 - \int_{\Omega} K(x)w^2 dx \geq \delta_2 \|w\|^2, \quad \forall w \in W. \quad (2.15)$$

A prova encontra-se no Apêndice A.

**Lema 2.5.** Se  $F$  satisfaz as hipóteses do Teorema 2.2, então  $J(v) \rightarrow -\infty$  quando  $\|v\| \rightarrow +\infty$ ,  $v \in V$ , e  $J(w) \rightarrow +\infty$  quando  $\|w\| \rightarrow +\infty$ ,  $w \in W$ .

**Prova:** Consideremos o caso em que  $F$  satisfaz (6) e (7) com  $\lambda_j \leq L(x)$ . Vamos mostrar primeiro que  $J(v) \rightarrow -\infty$  quando  $\|v\| \rightarrow +\infty$ ,  $v \in V$ .

Sejam  $\delta_1 > 0$  dado em (2.14) e  $\epsilon > 0$  tais que  $\epsilon < \lambda_1 \delta_1$ . Por (6),

$$L(x) = \liminf_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{2F(x, s)}{s^2},$$

dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\frac{2F(x, s)}{s^2} \geq L(x) - \epsilon \Rightarrow 2F(x, s) \geq (L(x) - \epsilon)s^2, \forall |s| \geq \delta.$$

Para  $|s| \leq \delta$  temos,

$$|2F(x, s) - (L(x) - \epsilon)s^2| \leq 2|F(x, s)| + (L(x) - \epsilon)|s|^2 \leq M$$

$$\Rightarrow |2F(x, s) - (L(x) - \epsilon)s^2| \leq M, \forall |s| \leq \delta.$$

Logo,  $2F(x, s) \geq (L(x) - \epsilon)s^2 - M, \forall |s| \leq \delta$ .

Sendo  $2F(x, s) \geq (L(x) - \epsilon)s^2, \forall |s| \geq \delta$  obtemos

$$2F(x, s) \geq (L(x) - \epsilon)s^2 - M, \forall |s| \geq \delta.$$

Portanto,

$$2F(x, s) \geq (L(x) - \epsilon)s^2 - M, \forall s \in \mathbb{R}, x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Observemos que,

$$\begin{aligned} 2J(v) &= 2 \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} F(x, v) dx \right) = \|v\|^2 - 2 \int_{\Omega} F(x, v) dx \\ &\leq \|v\|^2 - \int_{\Omega} [(L(x) - \epsilon)v^2 - M] dx \\ &= \|v\|^2 - \int_{\Omega} L(x)v^2 dx + \epsilon \int_{\Omega} v^2 dx + M \int_{\Omega} dx \\ &= \|v\|^2 - \int_{\Omega} L(x)v^2 dx + \epsilon \|v\|_2^2 + M|\Omega| \\ &\Rightarrow 2J(v) \leq \|v\|^2 - \int_{\Omega} L(x)v^2 dx + \epsilon \|v\|_2^2 + M|\Omega|. \end{aligned}$$

Na desigualdade acima vamos utilizar (2.14) e a desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned}
 2J(v) &\leq -\delta_1 \|v\|^2 + \frac{\epsilon}{\lambda_1} \|v\| + M|\Omega| = \left(-\delta_1 + \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) \|v\|^2 + M|\Omega| \\
 \Rightarrow 2J(v) &\leq \left(-\delta_1 + \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) \|v\|^2 + M|\Omega|, \quad \forall v \in V.
 \end{aligned}$$

Sendo  $\epsilon < \lambda_1 \delta_1 \Rightarrow -\delta_1 + \frac{\epsilon}{\lambda_1} < 0$ . Portanto,  $J(v) \rightarrow -\infty$ , quando  $\|v\| \rightarrow +\infty$ ,  $\forall v \in V$ .

Agora vamos provar que,  $J(w) \rightarrow +\infty$  quando  $\|w\| \rightarrow +\infty$ ,  $w \in W$ . Utilizaremos o Lema 2.4. Denotemos por  $W_0$  o  $\lambda_{j+1}$ -autoespaço e  $W_1 = W_0^\perp \subset W$ .

Para  $w = w_0 + w_1 \in W_0 + W_1$ , temos que

$$\begin{aligned}
 J(w) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx - \int_{\Omega} F(x, w) dx \\
 &= \frac{1}{2} \|w\|^2 - \frac{1}{2} \lambda_{j+1} \|w\|_2^2 + \frac{1}{2} \lambda_{j+1} \|w\|_2^2 - \int_{\Omega} F(x, w) dx \\
 &= \frac{1}{2} (\|w\|^2 - \lambda_{j+1} \|w\|_2^2) - \int_{\Omega} \left[ F(x, w) - \frac{\lambda_{j+1}}{2} w^2 \right] dx \\
 \Rightarrow J(w) &= \frac{1}{2} (\|w\|^2 - \lambda_{j+1} \|w\|_2^2) - \int_{\Omega} \left[ F(x, w) - \frac{\lambda_{j+1}}{2} w^2 \right] dx. \tag{2.16}
 \end{aligned}$$

Além disso, usando o Lema 2.4 item 1 e a desigualdade  $\limsup_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{2F(x, s)}{s^2} = K(x) \leq \lambda_{j+1}$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 \lim_{|s| \rightarrow +\infty} \left[ F(x, s) - \frac{\lambda_{j+1}}{2} s^2 \right] &\leq \lim_{|s| \rightarrow +\infty} \left[ F(x, s) - \frac{1}{2} K(x) s^2 \right] = -\infty \\
 \Rightarrow \lim_{|s| \rightarrow +\infty} \left[ F(x, s) - \frac{\lambda_{j+1}}{2} s^2 \right] &= -\infty \quad \text{uniformemente para } x \in \Omega \text{ q.t.p.} \tag{2.17}
 \end{aligned}$$

Assim, existe  $M > 0$  tal que  $F(x, s) - \frac{\lambda_{j+1}}{2} s^2 \leq M$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \Omega$  q.t.p.



Usando (2.16) e a última desigualdade, temos que,

$$\begin{aligned}
 J(w) &= J(w_0 + w_1) = \frac{1}{2} (||w||^2 - \lambda_{j+1} ||w||_2^2) - \int_{\Omega} \left[ F(x, w) - \frac{\lambda_{j+1}}{2} w^2 \right] dx \\
 &\geq \frac{1}{2} (||w||^2 - \lambda_{j+1} ||w||_2^2) - \int_{\Omega} M dx = \frac{1}{2} (||w||^2 - \lambda_{j+1} ||w||_2^2) - M|\Omega| \\
 &= \frac{1}{2} (||w_0||^2 + ||w_1||^2 - \lambda_{j+1} ||w_0||_2^2 - \lambda_{j+1} ||w_1||_2^2) - M|\Omega| \\
 &= \frac{1}{2} (||w_1||^2 - \lambda_{j+1} ||w_1||_2^2) - M|\Omega|. \\
 &\Rightarrow J(w) \geq \frac{1}{2} (||w_1||^2 - \lambda_{j+1} ||w_1||_2^2) - M|\Omega|.
 \end{aligned}$$

Tomemos  $l = \min\{k \in \mathbb{N} : \lambda_{j+1} < \lambda_{j+k}\}$ , daí,

$$\begin{aligned}
 J(w) &\geq \frac{1}{2} (||w_1||^2 - \lambda_{j+1} ||w_1||_2^2) - M|\Omega| \geq \frac{1}{2} \left( ||w_1||^2 - \lambda_{j+1} \frac{||w_1||^2}{\lambda_{j+k}} \right) - M|\Omega| \\
 &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_{j+k}} \right) ||w_1||^2 - M|\Omega|. \\
 &\Rightarrow J(w_0 + w_1) \geq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_{j+k}} \right) ||w_1||^2 - M|\Omega|.
 \end{aligned}$$

Fazendo  $||w_1|| \rightarrow +\infty$  na desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
 J(w_0 + w_1) &\geq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_{j+k}} \right) ||w_1||^2 - M|\Omega| \rightarrow +\infty \\
 &\Rightarrow J(w_0 + w_1) \rightarrow +\infty, \text{ quando } ||w_1|| \rightarrow +\infty.
 \end{aligned}$$

Para completarmos a prova é suficiente mostrar a seguinte afirmação.

**Afirmação 2.2.** Se  $w_n = w_{0n} + w_{1n} \in W_0 \oplus W_1$  é uma sequência tal que  $||w_{0n}|| \rightarrow +\infty$  e  $||w_{1n}||$  é limitada, então  $J(w_n) \rightarrow +\infty$  quando  $n \rightarrow +\infty$ .

Tomemos  $\hat{w}_{0n} = \frac{w_{0n}}{||w_n||}$ ,  $\hat{w}_{1n} = \frac{w_{1n}}{||w_n||}$  e  $\hat{w}_n = \hat{w}_{0n} + \hat{w}_{1n}$ .

Daí,

$$||\hat{w}_{0n}|| = \left\| \frac{w_{0n}}{w_n} \right\| = \frac{||w_{0n}||}{||w_n||} \rightarrow 1 \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

Por outro lado, sendo  $||w_{0n}|| \rightarrow +\infty$  e  $||w_{1n}||$  é limitada com  $w_n = w_{0n} + w_{1n}$ , temos

que

$$||w_n|| \rightarrow +\infty,$$

logo

$$||\hat{w}_{1n}|| = \left\| \frac{w_{1n}}{w_n} \right\| = \frac{||w_{1n}||}{||w_n||} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

Como as sequências  $(||\hat{w}_{0n}||)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(||\hat{w}_{1n}||)_{n \in \mathbb{N}}$  são limitadas e

$$||\hat{w}_n|| = ||\hat{w}_{0n} + \hat{w}_{1n}|| \leq ||\hat{w}_{0n}|| + ||\hat{w}_{1n}||,$$

obtemos que

$$(||\hat{w}_n||)_{n \in \mathbb{N}} \text{ é limitada.}$$

Assim, para algum  $\hat{w} \in W$ , temos

$$\hat{w}_n \rightharpoonup \hat{w} \text{ em } H_0^1(\Omega) \text{ e } \hat{w}_n \rightarrow \hat{w} \text{ em } L^2(\Omega) \text{ com } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Dessa forma,

$$||\hat{w}_n|| \rightarrow ||\hat{w}||.$$

Observemos que,

$$||\hat{w}|| = \lim_{n \rightarrow +\infty} ||\hat{w}_n|| = \lim_{n \rightarrow +\infty} ||\hat{w}_{0n} + \hat{w}_{1n}|| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{||\hat{w}_{0n}||^2 + ||\hat{w}_{1n}||^2} = 1$$

isto é,

$$||\hat{w}|| = 1.$$

Além disso,  $\hat{w}_{0n} \in W_0$  e  $\hat{w}_{1n} \in W_1$  com  $\hat{w}_n \in W$ , temos que,  $\hat{w}_n \rightarrow \hat{w} \in W_0$ , tal que  $\hat{w}$  é normalizada  $\lambda_{j+1}$ -autofunção. Em particular,  $\hat{w}(x) \neq 0$  para  $x \in \Omega$  q.t.p. com

$$\hat{w}_n(x) = \hat{w}_{0n}(x) + \hat{w}_{1n}(x) = \frac{w_{0n}(x)}{||w_n||} + \frac{w_{1n}(x)}{||w_n||} = \frac{w_n(x)}{||w_n||}$$

o que implica,

$$|w_n(x)| = ||w_n|| \cdot |\hat{w}_n(x)|.$$

Sendo  $\hat{w}(x) \neq 0$  e  $||w_n|| \rightarrow +\infty$ , obtemos,

$$|w_n(x)| = ||w_n|| \cdot |\hat{w}_n(x)| \rightarrow +\infty \text{ quando } n \rightarrow +\infty, \text{ } x \in \Omega \text{ q.t.p.} \quad (2.18)$$

Notemos que,  $\limsup_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{2F(x, w_n)}{w_n^2} \leq \lambda_{j+1}$ , logo existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{2F(x, w_n)}{w_n^2} \leq \lambda_{j+1}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow F(x, w_n) - \frac{\lambda_{j+1}}{2} w_n^2 \leq 0, \forall n \geq n_0.$$

Além disso,  $F(x, w_n) - \frac{\lambda_{j+1}}{2} w_n^2$  é uma sequência de funções em  $L^1(\Omega)$ , com

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} \left[ F(x, w_n) - \frac{\lambda_{j+1}}{2} w_n^2 \right] dx < +\infty, \text{ logo,}$$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \left[ F(x, w_n) - \frac{\lambda_{j+1}}{2} w_n^2 \right] dx \leq \int_{\Omega} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left[ F(x, w_n) - \frac{\lambda_{j+1}}{2} w_n^2 \right] dx.$$

Usando a desigualdade acima, (2.17) e (2.18), obtemos,

$$\int_{\Omega} \left[ F(x, w_n) - \frac{\lambda_{j+1}}{2} w_n^2 \right] dx \rightarrow -\infty \text{ quando } n \rightarrow +\infty,$$

juntamente com (2.16), provamos a afirmação.

Portanto,  $J(w) \rightarrow +\infty$ , quando  $\|w\| \rightarrow +\infty$ ,  $w \in W$ . ■

Vamos demonstrar o Teorema 2.2 abaixo, faremos um enfraquecimento da condição de não-quadraticidade do infinito em  $F$  e mesmo assim vamos garantir a existência de solução não-trivial para o problema (1). Para esse propósito iremos utilizar a geometria do Teorema do Ponto de Sela e consequentemente o Teorema Geral Minimax provado no Capítulo 1, com isso, iremos garantir que o problema (1) tem solução não-trivial.

**Teorema 2.2.** Suponha que  $F$  satisfaz (6). Então o problema (1) tem solução  $u \in H_0^1(\Omega)$  desde que:

1.  $F$  satisfaça (7) com  $\lambda_j < L(x)$  em um conjunto de medida positiva; ou
2.  $F$  satisfaça (8) com  $K(x) < \lambda_{j+1}$  em um conjunto de medida positiva.

**Prova:** Tomemos  $S = W$  e  $Q = \{v \in V : \|v\| \leq R\}$  com  $R > 0$ . Observemos que  $\partial Q = \{v \in V : \|v\| = R\}$ . Pelo Lema 2.2 temos a condição  $(C)_c \forall c > 0$ . Além disso,

$$|J(w)| \leq k, \forall w \in W \cap B_c(0), \text{ onde } B_c(0) = \{w \in W : \|w\| \leq c\}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 |J(w)| &= \left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx - \int_{\Omega} F(x, w) dx \right| \leq \frac{1}{2} \|w\|^2 + \int_{\Omega} |F(x, w)| dx \\
 &\leq c + \int_{\Omega} (a_1 |w|^p + a_2) dx = c + a_1 \|w\|_p^p + a_2 |\Omega| \leq k \\
 &\Rightarrow |J(w)| \leq k,
 \end{aligned}$$

onde  $k$  é uma constante. Logo,  $J(w) \geq -k$ ,  $\forall w \in W$ . Dessa forma, tomemos

$$\beta \equiv \inf_{w \in W} J(w) < +\infty.$$

Pelo Lema 2.5,  $J(v) \rightarrow -\infty$  quando  $\|v\| \rightarrow +\infty$ ,  $v \in V$ . Logo,  $J(v) \leq -k_1$ ,  $\forall v \in V$  onde  $k_1 > 0$ . Observemos que,  $V \cap S_R(0) = \partial Q \subset V$ , onde  $S_R(0) = \{v \in V : \|v\| = R\}$ . Assim,

$$J(v) \leq -k_1, \quad \forall v \in \partial Q.$$

Daí, tomemos  $\sup_{v \in \partial Q} J(v) \equiv \alpha < \beta$ .

Logo,

$$\sup_{u \in \partial Q} J(u) \equiv \alpha < \beta \equiv \inf_{u \in W} J(u).$$

Agora, vamos mostrar que  $S$  e  $\partial Q$  fazem um link. Primeiramente  $S \cap \partial Q = \emptyset$ . De fato, se existisse  $u \in S \cap \partial Q$ , teríamos

$$u \in S \text{ e } u \in \partial Q.$$

Consequentemente,  $\|u\| = R > 0$  com  $u \in V$ , mas  $u \in S = W = V^\perp$ . Daí,  $\|u\| = 0$  o que é um absurdo. Logo,  $S \cap \partial Q = \emptyset$ .

Agora vamos mostrar que  $h(Q) \cap S \neq \emptyset$ , seja

$$\pi : H_0^1(\Omega) \rightarrow V \text{ a projeção de } H_0^1(\Omega) \text{ em } V$$

onde  $h : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  é uma aplicação contínua tal que  $h(u) = u$ ,  $\forall u \in \partial Q$ .

Vamos provar que  $0 \in \pi(h(Q))$ . Para todo  $t \in [0, 1]$  e  $u \in V$  defina  $h_t(u) = t\pi(h(u)) + (1-t)u$  por  $h_t : V \rightarrow V$ , observemos que  $h_t$  é contínua e define uma homotopia de  $h_0(u) = u$  com  $h_1(u) = \pi \circ h(u)$ . Além disso,  $\forall u \in \partial Q$  temos,

$$h_t(u) = t\pi(h(u)) + (1-t)u = t\pi(u) + (1-t)u = tu + u - tu = u$$

$$\Rightarrow h_t(u) = u, \quad \forall u \in \partial Q, \text{ ou seja, } h_t|_{\partial Q} = id, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Com isto, o grau topológico  $d(h_t, Q, 0)$  (vide Apêndice B) está bem definido, pois se  $0 \in h_t(\partial Q)$  existe  $u \in \partial Q$  tal que

$$h_t(u) = 0 \Rightarrow u = 0,$$

como  $u \in \partial Q$ , temos que  $\|u\| = R > 0$  o que é um absurdo. Assim,  $0 \notin h_t(\partial Q)$ .

Isso mostra que  $d(h_t, Q, 0)$  está bem definido para todo  $t \in [0, 1]$ . Pela propriedade de normalização, confira [2] ou Apêndice B deste trabalho, temos que  $d(h_t, Q, 0) = 1$ , pois  $0 \in Q$ . Agora definamos

$$H : [0, 1] \times Q \rightarrow V \text{ por } H(t, u) = h_t(u) = t\pi(h(u)) + (1 - t)u,$$

notemos que  $H$  é contínua. Além disso,  $0 \notin H([0, 1] \times \partial Q)$ , pois se  $0 \in H([0, 1] \times \partial Q)$ , então existe  $(t, u) \in [0, 1] \times \partial Q$  tal que

$$\begin{aligned} H(t, u) = 0 &\Rightarrow t\pi(h(u)) + (1 - t)u = 0 \Rightarrow t\pi(u) + (1 - t)u = 0 \\ &\Rightarrow tu + u - tu = 0 \Rightarrow u = 0, \end{aligned}$$

como  $u \in \partial Q$  temos que  $\|u\| = R > 0$  com  $u \in V$ , mas  $u \in S = W = V^\perp$ . Daí,  $\|u\| = 0$ . Absurdo!

Pela propriedade da invariância homotópica  $d(H(t, \cdot), Q, 0) = \text{constante}$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ . Uma vez que  $h_t|_{\partial Q} = id$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ , em particular,  $h_0(u) = h_1(u) = id$ ,  $\forall u \in \partial Q$ , obtemos que

$$d(\pi \circ h, Q, 0) = d(id, Q, 0) = 1.$$

Assim,  $0 \in \pi \circ h(Q)$ .

Novamente pelo Lema 2.5,  $J(v) \rightarrow -\infty$  quando  $\|v\| \rightarrow +\infty, v \in V$ .

Logo,

$$J(v) \leq -k_2, \forall v \in V \text{ onde } k_2 > 0.$$

Observemos que,  $V \cap B_R(0) = Q \subset V$ , onde  $B_R(0) = \{v \in V : \|v\| \leq R\}$ . Assim,  $J(v) \leq -k_2$ ,  $\forall v \in Q$ . Daí, tomemos  $\sup_{v \in Q} J(v) \equiv \xi < +\infty$ .

Dessa forma,

$$\sup_{u \in Q} J(u) \equiv \xi < +\infty.$$

Assim, pelo Teorema Geral Minimax, o funcional  $J$  possui um valor crítico. Portanto, o problema (1) tem solução não-trivial.

■

# Apêndice A

## Resultados Básicos

Neste apêndice, apresentamos alguns resultados usados neste trabalho. Alguns apresentamos a prova e em outros indicamos a referência onde a mesma se encontra.

**Lema A.1.** Se  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de Carathéodory com crescimento subcrítico, isto é,

$$|f(x, s)| \leq a_0 |s|^{p-1} + b_0, \quad \forall \quad s \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega \quad \text{q.t.p.}$$

com  $a_0, b_0 > 0$  constantes, então

$$|F(x, s)| \leq a_1 |s|^p + b_1 |s|, \quad \text{com } a_1, b_1 > 0 \text{ e } s \in \mathbb{R}.$$

**Prova:** De fato, suponhamos primeiro que  $s \geq 0$ .

$$\begin{aligned} |F(x, s)| &= \left| \int_0^s f(x, t) dt \right| \leq \int_0^s |f(x, t)| dt \leq \int_0^s (a_0 |t|^{p-1} + b_0) dt \\ &= \int_0^s (a_0 t^{p-1} + b_0) dt = \frac{a_0}{p} s^p + b_0 s = \frac{a_0}{p} |s|^p + b_0 |s| \\ &= a_1 |s|^p + b_1 |s| \\ &\Rightarrow |F(x, s)| \leq a_1 |s|^p + b_1 |s|, \quad \forall \quad s \geq 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $s < 0$ , temos que

$$\begin{aligned}
|F(x, s)| &= \left| \int_0^s f(x, t) dt \right| = \left| - \int_s^0 f(x, t) dt \right| \leq \int_s^0 |f(x, t)| dt \\
&\leq \int_s^0 (a_0 |t|^{p-1} + b_0) dt = \int_s^0 [a_0 (-t)^{p-1} + b_0] dt \\
&= - \int_{-s}^0 (a_0 t^{p-1} + b_0) dt = \int_0^{-s} (a_0 t^{p-1} + b_0) dt \\
&= - \left[ \frac{a_0}{p} (-s)^p + b_0 s \right] = \frac{a_0}{p} (-s)^p + b_0 (-s) \\
&= a_1 |s|^p + b_1 |s| \\
\Rightarrow |F(x, s)| &\leq a_1 |s|^p + b_1 |s|, \quad \forall s \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \Omega \text{ q.t.p.}
\end{aligned}$$

■

**Proposição A.1.** As condições de Landesman-Lazer [7] e de Ambrosetti-Rabinowitz [1] implicam que  $F$  satisfaz a condição (3) introduzida no Capítulo 1 desde que,  $\mu \leq 1$  e  $\mu \leq \theta$  respectivamente.

**Prova:** Considere uma função  $f(x, s) = \lambda s + g(s)$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Assumimos que  $g$  satisfaça a condição Landesman-Lazer [7], isto é,

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} g(s) = g_{\pm}, \text{ com } g_{\pm} > 0.$$

Assim,

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{G(s)}{|s|} = |g_{\pm}|.$$

De fato,

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} g(s) = g_{\pm}, \text{ com } g_{\pm} > 0.$$

Logo,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{G(s)}{|s|} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{G(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow +\infty} g(s) = g_+$$

e

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{G(s)}{|s|} = - \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{G(s)}{s} = - \lim_{s \rightarrow -\infty} g(s) = -g_-$$

Assim,

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{G(s)}{|s|} = |g_{\pm}|.$$

Dessa forma,  $F$  satisfaz (3) para todo  $\mu \leq 1$ . Com efeito,

$$\frac{f(x, s)s - 2F(x, s)}{|s|^\mu} = \frac{[\lambda s + g(s)]s - 2[(\lambda s^2)/2 + G(s)]}{|s|^\mu} = \frac{g(s)s - 2G(s)}{|s|^\mu}$$

se  $\mu = 1$ , temos que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{g(s)s - 2G(s)}{s} = g_+ - 2g_+ = -g_+ < 0$$

e

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{g(s)s - 2G(s)}{-s} = -g_- - 2g_- = -3g_- < 0$$

Assim, para  $\mu \leq 1$  temos que

$$\frac{g(s)s - 2G(s)}{|s|^\mu} = \frac{g(s)s - 2G(s)}{|s|^\mu |s|^{-1} |s|} = \frac{g(s)s - 2G(s)}{|s| \cdot |s|^{\mu-1}} = \frac{g(s)s - 2G(s)}{|s|} |s|^{1-\mu}$$

daí,

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{g(s)s - 2G(s)}{|s|} |s|^{1-\mu} = -\infty.$$

Logo,  $F$  satisfaz (3) para todo  $\mu \leq 1$ .

Por outro lado, consideremos

$$0 < \theta F(x, s) \leq f(x, s)s, \quad \forall |s| \geq R, \quad \text{uniformemente para } x \in \Omega$$

para algum  $\theta > 2$  e  $R > 0$ , introduzida por Ambrosetti e Rabinowitz [1] para obter a solução não-trivial no caso superquadrático. Notemos que,

$$F(x, s) \geq a_1 |s|^\theta, \quad \forall |s| \geq M, \quad \text{para algum } a_1 > 0.$$

De fato,

(i)  $s > 0$ :

$$0 < \theta F(x, s) \leq f(x, s)s \Rightarrow \frac{\theta}{s} \leq \frac{f(x, s)}{F(x, s)}, \quad \forall s \geq M \text{ e } x \in \Omega$$

$$\Rightarrow \int_M^s \frac{\theta}{t} dt \leq \int_M^s \frac{f(x, t)}{F(x, t)} dt \Rightarrow \theta \ln |t|_M^s \leq \ln |F(x, t)|_M^s$$

$$\Rightarrow \theta \ln s - \theta \ln M \leq \ln F(x, s) - \ln F(x, M)$$

$$\Rightarrow \theta \ln \frac{s}{M} \leq \ln \left( \frac{F(x, s)}{F(x, M)} \right) \Rightarrow \ln \left( \frac{s}{M} \right)^\theta \leq \ln \left( \frac{F(x, s)}{F(x, M)} \right)$$



Sendo  $\ln$  uma função crescente, obtemos

$$\left(\frac{s}{M}\right)^\theta \leq \frac{F(x, s)}{F(x, M)} \Rightarrow \frac{s^\theta}{M^\theta} \leq \frac{F(x, s)}{F(x, M)}.$$

Assim,

$$F(x, s) \geq \frac{F(x, M)}{M^\theta} s^\theta, \forall s \geq M \text{ e } x \in \Omega$$

Seja  $K_1 = \inf_{x \in \Omega} F(x, s)$  onde  $s \geq M$  e  $x \in \Omega$ .

Assim,

$$F(x, s) \geq \frac{K_1}{M^\theta} s^\theta, \forall s \geq M \text{ e } x \in \Omega.$$

Tomando  $C_1 = \frac{K_1}{M^\theta} > 0$ , obtemos

$$F(x, s) \geq C_1 s^\theta, \forall s \geq M \text{ e } x \in \Omega.$$

(ii)  $s < 0$ :

$$0 < \theta F(x, s) \leq f(x, s)s \Rightarrow \frac{f(x, s)}{F(x, s)} \leq \frac{\theta}{s}, \forall s \leq -M \text{ e } x \in \Omega$$

$$\Rightarrow \int_s^{-M} \frac{f(x, t)}{F(x, t)} dt \leq \int_s^{-M} \frac{\theta}{t} dt \Rightarrow \ln |F(x, t)| \Big|_s^{-M} \leq \theta \ln |t| \Big|_s^{-M}$$

$$\Rightarrow \ln F(x, -M) - \ln F(x, s) \leq \theta \ln |-M| - \theta \ln |s|$$

$$\Rightarrow \ln \left( \frac{F(x, -M)}{F(x, s)} \right) \leq \theta \ln \frac{|-M|}{|s|} \Rightarrow \ln \left( \frac{F(x, s)}{F(x, M)} \right) \leq \ln \left| \frac{-M}{s} \right|^\theta$$

Sendo  $\ln$  uma função crescente, obtemos

$$\frac{F(x, -M)}{F(x, s)} \leq \left| \frac{-M}{s} \right|^\theta \Rightarrow \frac{F(x, s)}{F(x, M)} \leq \frac{|-M|^\theta}{|s|^\theta}.$$

Assim,

$$\frac{F(x, -M)}{M^\theta} |s|^\theta \leq F(x, s), \forall s \leq -M \text{ e } x \in \Omega$$

Seja  $K_2 = \inf_{x \in \Omega} F(x, -M)$ , onde  $s \leq -M$  e  $x \in \Omega$ .

Assim,

$$\frac{K_2}{M^\theta} |s|^\theta \leq F(x, s), \forall s \leq -M \text{ e } x \in \Omega.$$

Tomando  $C_2 = \frac{K_2}{M^\theta} > 0$ , obtemos

$$C_2|s|^\theta \leq F(x, s), \quad \forall s \leq -M \text{ e } x \in \Omega.$$

Tomando  $a_1 = \min\{C_1, C_2\}$ , obtemos

$$a_1|s|^\theta \leq F(x, s), \quad \forall |s| \geq M \text{ e } x \in \Omega.$$

Logo,

$$\frac{f(x, s)s - 2F(x, s)}{|s|^\mu} \geq (\theta - 2) \frac{F(x, s)}{|s|^\mu} \geq (\theta - 2)a_1|s|^{\theta-\mu}.$$

Assim,  $F$  satisfaz (3) para todo  $\mu \leq \theta$ . ■

**Lema A.2.** 1. se  $\lambda_j \lesssim L(x)$  para todo  $x \in \Omega$  então existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$\|v\|^2 - \int_{\Omega} L(x)v^2 dx \leq -\delta_1\|v\|^2, \quad \forall v \in V;$$

2. se  $K(x) \lesssim \lambda_{j+1}$  para todo  $x \in \Omega$  então existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$\|w\|^2 - \int_{\Omega} K(x)w^2 dx \geq \delta_2\|w\|^2, \quad \forall w \in W.$$

**Prova:** Vamos denotar  $\Omega_1 = \{x \in \Omega : \lambda_j < L(x)\}$  um conjunto de medida positiva e  $\Omega_2 = \{x \in \Omega : K(x) < \lambda_{j+1}\}$  um conjunto de medida positiva. Iremos provar a primeira afirmação.

Defina  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\psi(v) = \|v\|^2 - \int_{\Omega} L(x)v^2 dx, \quad v \in V.$$

Sendo  $\|v\|^2 \leq \lambda_j\|v\|_2^2$ ,  $v \in V$ , temos

$$\begin{aligned} \psi(v) &= \|v\|^2 - \int_{\Omega} L(x)v^2 dx \leq \lambda_j\|v\|_2^2 - \int_{\Omega} L(x)v^2 dx = \lambda_j \int_{\Omega} v^2 dx - \int_{\Omega} L(x)v^2 dx \\ &= \int_{\Omega} [\lambda_j - L(x)]v^2 dx \leq \int_{\Omega_1} [\lambda_j - L(x)]v^2 dx \leq 0, \\ &\Rightarrow \psi(v) \leq 0, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que se  $\psi(v) = 0$  então  $v \equiv 0$ . De fato, se  $\psi(v) = 0$ , então

$$\begin{aligned} 0 = \psi(v) &= \|v\|^2 - \int_{\Omega} L(x)v^2 dx = \int_{\Omega} [\lambda_j - L(x)]v^2 dx \leq \int_{\Omega_1} [\lambda_j - L(x)]v^2 dx \leq 0 \\ \Rightarrow \int_{\Omega_1} [\lambda_j - L(x)]v^2 dx &= 0. \end{aligned}$$

Logo,  $v(x) = 0$ . Além disso, como  $\lambda_j < L(x)$  e  $\|v\|^2 \leq \lambda_j \|v\|_2^2$ , obtemos,

$$\begin{aligned} 0 = \psi(v) &= \|v\|^2 - \int_{\Omega} L(x)v^2 dx \leq \|v\|^2 - \int_{\Omega} \lambda_j v^2 dx = \|v\|^2 - \lambda_j \|v\|_2^2 \leq 0 \\ \Rightarrow \|v\|^2 - \lambda_j \|v\|_2^2 &= 0 \Rightarrow \|v\|^2 = \lambda_j \|v\|_2^2. \end{aligned}$$

Assim,  $v$  é  $\lambda_j$ -autofunção. Sendo  $v(x) = 0$  num conjunto de medida positiva, segue pelo Princípio da Continuação Única que  $v \equiv 0$ . Devemos mostrar que existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$\|v\|^2 - \int_{\Omega} L(x)v^2 dx \leq -\delta_1 \|v\|^2, \quad \forall v \in V,$$

suponhamos que a afirmação seja falsa, então existe uma sequência  $v_n \in V$  tal que

$$\|v_n\| = 1 \text{ e } \psi(v_n) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

De fato, dado  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\delta = \frac{1}{n}$  e uma sequência  $z_n \in V$  com

$$\|z_n\|^2 - \int_{\Omega} L(x)z_n^2 dx > -\frac{1}{n}\|z_n\|^2 \Rightarrow \left\| \left( \frac{z_n}{\|z_n\|} \right) \right\|^2 - \int_{\Omega} L(x) \left( \frac{z_n}{\|z_n\|} \right)^2 dx > -\frac{1}{n}.$$

Tomemos  $v_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}$ , daí, a última desigualdade acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\psi(v_n) = \|v_n\|^2 - \int_{\Omega} L(x)v_n^2 dx > -\frac{1}{n}.$$

Como  $\psi(v_n) \leq 0$ , obtemos,  $-\frac{1}{n} < \|v_n\|^2 - \int_{\Omega} L(x)v_n^2 dx \leq 0$ , e daí

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi(v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \|v_n\|^2 - \int_{\Omega} L(x)v_n^2 dx \right) = 0.$$

Assim, existe uma sequência  $v_n \in V$  tal que  $\|v_n\| = 1$  e  $\psi(v_n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ .

Sendo  $\dim V < +\infty$ , suponhamos que  $v_n \rightarrow v$  em  $H_0^1(\Omega)$  onde  $v \in V$ . Assim,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \psi(v_n) \leq \psi(v) \leq 0 \Rightarrow \psi(v) = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v = 0.$$

Daí,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi(v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \|v\|^2 - \int_{\Omega} L(x) v_n^2 dx \right) = 0$ . Por outro lado,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi(v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \|v\|^2 - \int_{\Omega} L(x) v_n^2 dx \right) = 1,$$

o que é um absurdo. Agora, vamos provar a segunda afirmação.

Defina  $\nu : W \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\nu(w) = \|w\|^2 - \int_{\Omega} K(x) w^2 dx, \quad w \in W.$$

Sendo  $\|w\|^2 \geq \lambda_{j+1} \|w\|_2^2$ ,  $\forall w \in W$ , temos

$$\begin{aligned} \nu(w) &= \|w\|^2 - \int_{\Omega} K(x) w^2 dx \geq \lambda_{j+1} \|w\|_2^2 - \int_{\Omega} K(x) w^2 dx \\ &= \lambda_{j+1} \int_{\Omega} w^2 dx - \int_{\Omega} K(x) w^2 dx = \int_{\Omega} [\lambda_{j+1} - K(x)] w^2 dx \\ &\geq \int_{\Omega_2} [\lambda_{j+1} - K(x)] w^2 dx \geq 0 \\ &\Rightarrow \nu(w) \geq 0, \quad \forall w \in W. \end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que se  $\nu(w) = 0$  então  $w \equiv 0$ . De fato, se  $\nu(w) = 0$  então

$$\begin{aligned} 0 &= \nu(w) = \|w\|^2 - \int_{\Omega} K(x) w^2 dx \geq \int_{\Omega} [\lambda_{j+1} - K(x)] w^2 dx \\ &\geq \int_{\Omega_2} [\lambda_{j+1} - K(x)] w^2 dx \geq 0 \\ &\Rightarrow \int_{\Omega_1} [\lambda_{j+1} - K(x)] w^2 dx = 0. \end{aligned}$$

Logo,  $w(x) = 0$ . Além disso, como  $\lambda_{j+1} > K(x)$  e  $\|w\|^2 \geq \lambda_{j+1} \|w\|_2^2$ , obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \nu(w) = \|w\|^2 - \int_{\Omega} K(x) w^2 dx \geq \|w\|^2 - \int_{\Omega} \lambda_{j+1} w^2 dx \\ &= \|w\|^2 - \lambda_{j+1} \|w\|_2^2 \geq 0 \\ &\Rightarrow \|w\|^2 - \lambda_{j+1} \|w\|_2^2 = 0, \text{ o que implica } \|w\|^2 = \lambda_{j+1} \|w\|_2^2. \end{aligned}$$

Assim,  $w$  é  $\lambda_{j+1}$ -autofunção. Sendo  $w(x) = 0$  num conjunto de medida positiva, segue pelo Princípio da Continuação Única que  $w \equiv 0$ . Devemos mostrar que existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$\|w\|^2 - \int_{\Omega} K(x)w^2 dx \geq \delta_2 \|w\|^2, \quad \forall w \in W.$$

Suponhamos que a afirmação seja falsa. Então existe uma sequência  $v_n \in V$  tal que

$$\|w_n\| = 1 \text{ e } \nu(w_n) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

De fato, dado  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\delta = \frac{1}{n}$  e uma sequência  $s_n \in W$  com

$$\|s_n\|^2 - \int_{\Omega} K(x)s_n^2 dx < \frac{1}{n} \|s_n\|^2 \Rightarrow \left\| \left( \frac{s_n}{\|s_n\|} \right) \right\|^2 - \int_{\Omega} K(x) \left( \frac{s_n}{\|s_n\|} \right)^2 dx < \frac{1}{n}.$$

Tomemos  $w_n = \frac{s_n}{\|s_n\|}$ . Daí, a última desigualdade acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\nu(w_n) = \|w_n\|^2 - \int_{\Omega} K(x)w_n^2 dx < \frac{1}{n}.$$

Desde que  $\nu(w_n) \geq 0$ , obtemos,  $0 \leq \|v_n\|^2 - \int_{\Omega} K(x)w_n^2 dx < \frac{1}{n}$ , temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu(w_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \|w_n\|^2 - \int_{\Omega} K(x)w_n^2 dx \right) = 0.$$

Assim, existe uma sequência  $w_n \in W$  tal que  $\|w_n\| = 1$  e  $\nu(w_n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . Passando uma subsequência se necessário, seja  $w_n \rightharpoonup w$  onde  $w \in W$  e  $w_n \rightarrow w$  em  $L^2(\Omega)$  tal que

$$0 \leq \nu(w) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \nu(w_n) = 0 \Rightarrow \nu(w) = 0 \Rightarrow w = 0.$$

Assim,  $w_n \rightarrow w$  em  $L^2(\Omega)$  com  $w = 0$ . Daí,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu(w_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \|w\|^2 - \int_{\Omega} K(x)w_n^2 dx \right) = 0.$$

Por outro lado, segue que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu(w_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \|w\|^2 - \int_{\Omega} K(x)w_n^2 dx \right) = 1$$

o que é um absurdo, e isto finaliza a prova. ■

**Lema A.3. (Lema de Fatou's)** (Ver [10]) Se  $(f_n)$  é uma sequência de funções em  $L^1(\Omega)$  que satisfaz:

1. para todo  $n$ ,  $f_n \geq 0$  q.t.p.
2.  $\sup_n \int f_n < +\infty$ .

para quase todo  $x \in \Omega$ ,  $f(x) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \leq +\infty$ , então,  $f \in L^1$  e

$$\int f \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int f_n.$$

**Proposição A.2.** Seja  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função com  $|f(x, s)| \leq a_1 + a_2|s|^p$  onde  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$  e  $0 \leq p < (N+2)(N-2)^{-1}$ ,  $N \geq 3$ . Além disso, considere

$$F(x, s) = \int_0^s f(x, t)dt \text{ e } J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} F(x, u)dx.$$

Se  $(u_n)$  é uma sequência limitada em  $H_0^1(\Omega)$  tal que  $J'(u_n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$  então  $(u_n)$  possui uma subsequência convergente.

**Prova:** A prova encontra-se na Proposição B.35 de [14].

# Apêndice B

## Grau Topológico

Neste Apêndice, vamos lembrar a definição de Grau de Brouwer e suas propriedades. Estes fatos são utilizados nas provas dos Teoremas 2.1 e 2.2. Além disso, uma das aplicações da Teoria do Grau é usada no Teorema do Ponto de Sela, conforme Rabinowitz [14]. A referência da definição do Grau de Brouwer é o livro do Costa [2].

Seja  $f \in C(\overline{X}, \mathbb{R}^n)$ , onde  $X \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto aberto e limitado. Dado  $b \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial X)$ , o problema consiste em resolver a equação

$$f(x) = b \text{ para } x \in X. \quad (\text{B.1})$$

Isto pode ser feito usando o chamado grau de Brouwer da função  $f$ , em relação ao conjunto  $X$  no ponto  $b$ . Denotemos o grau por  $d(f, X, b)$ , o qual é um número inteiro que representa a grosso modo, o número de soluções para a equação (B.1).

Primeiro, consideremos o caso regular, isto é, com  $f \in C(\overline{X}, \mathbb{R}^n)$  e  $b \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial X)$  um valor regular, ou seja,  $f'(y)$  é inversível para todo  $y \in f^{-1}(b)$ .

Dessa forma, definimos

$$d(f, X, b) = \sum_{y \in f^{-1}(b)} \text{sgn} \det[f'(y)],$$

onde

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0, \\ -1, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

A soma acima é finita, conforme [2].

Valem as seguintes propriedades para o grau:

1. **(Normalização)** Se  $Id : \overline{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a aplicação identidade, então

$$d(Id, X, b) = \begin{cases} 1, & \text{se } b \in X \\ 0, & \text{se } b \notin X \end{cases}$$

2. **(Existência)** Se  $d(f, X, b) \neq 0$ , então existe uma solução  $x_0 \in X$  de (B.1).  
 3. **(Aditividade)** Se  $X = X_1 \cup X_2$  e  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ , então

$$d(f, X, b) = d(f, X_1, b) + d(f, X_2, b).$$

4. **(Continuidade)** Seja  $f \in C(\overline{X}, \mathbb{R}^n)$  e  $b \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial X)$  um valor regular, então existe  $\epsilon > 0$  tal que, para toda função contínua  $\sigma : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  com

$$\sup_{x \in \overline{X}} \|\sigma(x) - f(x)\| < \epsilon,$$

vale a seguinte igualdade  $d(f, X, b) = d(\sigma, X, b)$ .

5. **(Invariância Homotópica)** Se  $H \in C([0, 1] \times \overline{X}, \mathbb{R}^n)$  e  $b \notin H([0, 1] \times \partial X)$ , então

$$d(H(t, \cdot), X, b) = \text{constante} \quad \forall t \in [0, 1].$$

6. **(Dependência na Fronteira)** Se  $\sigma = f$  em  $\partial X$ , então

$$d(f, X, b) = d(\sigma, X, b).$$

Dessa forma, podemos estender a definição  $d(f, X, b)$  com a função  $f \in C(\overline{X}, \mathbb{R}^n)$  e  $b \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial X)$  (veja [2]).



# Referências Bibliográficas

- [1] A. Ambrosetti & P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. funct. Analysis, 1973.
- [2] D. G. Costa, *An Invitation to Variational Methods in Differential Equations*, Birkhauser, 2007.
- [3] D. G. Costa & C. A. Magalhães, *A variational approach to subquadratic perturbations of elliptic systems*, J. diff. Eqns. 1994.
- [4] D. G. Costa & C. A. Magalhães, *Un problème elliptique non-quadratique à  $L$ 'infini*, C. r. Acad. Sci. Paris, 1992.
- [5] D. G. Costa & C. A. Magalhães, *Variational Elliptic Problems Which Are Non-quadratic at Infinity*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, 1994.
- [6] D. G. Costa & A. S. Oliveira, *Existence of Solution for a Class of Semilinear Elliptic Problems at Double Resonance*, Bol. Soc. Bras. Mat., 1988.
- [7] E. M. Landesman & A. C. Lazer *Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance*, J. Math. Mech, 1970.
- [8] G. Cerami, *Un criterio de esistenza per i punti critici su varietà ilimitate*, Rc. Ist. Lomb. Sci. Lett. 1978.
- [9] G. Cerami, *Sull'esistenza di autovalori per un problema al contorno non lineare*, Annali. Mat. pura appl., to appear.
- [10] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.
- [11] J. Mawhin, J. R. Ward & M. Willem *Variational Methods and Semilinear Elliptic Equations*, Archsration, Mech, Analysis, 1986.
- [12] P. Bartolo, V. Benci & D. Fortunato, *Abstract Critical Point Theorems and Applications to Some Nonlinear Problems With Strong Resonance at Infinity*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, 1983.

- [13] P. H. Rabinowitz, *Variational Methods for Nonlinear Eigenvalue Problems*, Edited by G. Prodi, pp. 141- 195, Edizioni Cremonese, Roma, 1974.
- [14] P. H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory With Applications to Differential Equations*, American Mathematical Society, 1988.
- [15] R. S. Palais, *Ljusternik-Schnirelman Theory on Banach Manifolds*, Topology, 1966.
- [16] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, New York: John Wiley & Sons, 1964.